Eeva Männistö

Kenttäteorian matemaattisia perusteita

Tekniikan ja innovaatiojohtamisen yksikkö

Sähkötekniikan diplomityö

Sähkö- ja energiatekniikka

Vaasa 2025

VAASAN YLIOPISTO
Tekniikan ja innovaatiojohtamisen yksikkö
Tekijä: Eeva Männistö
Tutkielman nimi: Kenttäteorian matemaattisia perusteita
Tutkinto: Diplomi-insinööri
Oppiaine: Sähkötekniikka
Työn valvoja: Kimmo Kauhaniemi
Työn ohjaaja: Marko Moisio
Valmistumisvuosi: 2025 **Sivumäärä:** 116

TIIVISTELMÄ:
Tämän diplomityön tavoite on tutkia sähkö- ja magneettikenttiä kuvaavan kenttäteorian matemaattista luonnetta. Tarkoitus on osoittaa, miten hyvä matematiikan osaaminen tukee kenttäteorian oppimista ja ymmärtämistä.

Aiheen valinta perustellaan kokemuksella siitä, että kenttäteorian ja siinä käytettävän matematiikan välisen yhteyden hahmottaminen sekä niiden oppiminen yleensä tuottavat merkittäviä vaikeuksia. Tässä diplomityössä pyritään esittämään tietyt kenttäteorian ja matematiikan peruskäsitteet siten, että ne muodostavat johdonmukaisen ja yhtenäisen kokonaisuuden, ja näin motivoimaan matematiikan oppimiseen siinä määrin, että sitä on aidosti mahdollista soveltaa kenttäteoriaa opiskeltaessa.

Työssä esitellään ensin matemaattisia käsitteitä, jotka ovat läheisessä yhteydessä kenttäteoriaan. Tämä osio käsittelee ensisijaisesti vektorianalyysia eli vektorikenttien differentiaali- ja integraalilaskentaa, sekä muuttujienvaihtoa. Matemaattiset käsitteet esitetään määritelminä ja niistä johdettuina tuloksina, joista osa perustellaan. Käsitteet pyritään kuvaamaan siten, että niihin työn seuraavissa luvuissa viittaamalla pystytään yksinkertaistamaan kenttäteorian käsitteiden selittämistä. Tämän menetelmän tarkoitus on keventää kenttäteoriaa käsittelevän osion sisältöä ja samalla havainnollistaa matematiikan merkitystä työn tavoitteiden mukaisesti.

Varsinaista sähkö- ja magneettikenttien teoriaa selittävien lukujen sisältö rakentuu sitä oleellisesti kuvaavien Maxwellin yhtälöiden ja Lorentzin voiman ympärille. Ensin käsitellään sähkövarausten aiheuttamia staattisia sähkökenttiä ja Maxwellin I yhtälöä eli Gaussin lakia sähkökentille. Varausten liikkeen, eli sähkövirran, ja Lorentzin voiman jälkeen käsitellään stationaaristen virtojen ja niiden aiheuttamien staattisten magneettikenttien yhteyttä sekä johdetaan Maxwellin II yhtälö eli Gaussin laki magneettikentille.

Tämän jälkeen käsitellään ajasta riippuvia sähkömagneettisia kenttiä. Tällöin johdetaan Maxwellin IV yhtälö eli Ampère-Maxwellin laki ja esitetään sähkömotorisen voiman käsite sekä sähkömagneettinen induktio. Sähkömagneettisen induktion käsittely jaetaan tilanteisiin, joissa induktio tapahtuu Lorentzin voiman ja toisaalta Faradayn lain eli Maxwellin III yhtälön kuvaaman ilmiön vaikutuksesta, ja myös molempien aiheuttamana.

Havaitaan, että työn alkuosassa esitelty matemaattinen sisältö on oleellisesti yhteydessä koko kenttäteoriaa käsittelevään työn osaan, ja todetaan matematiikan osaamisen hyödyllisyys kenttäteorian ymmärtämisen kannalta. Työn aineisto on laajennettavissa esimerkiksi materiaalien vaikutuksen sähkö- ja magneettikenttien käyttäytymiseen sekä sähkömagneettisten aaltojen kuvaamiseen.

Avainsanat: kenttäteoria, sähkökentät, magneettikentät, vektorianalyysi, Maxwellin yhtälöt

VAASAN YLIOPISTO
School of Technology and Innovations
Author: Eeva Männistö
Thesis title: Mathematical Basis of Electromagnetic Field Theory
Degree: Master of Science
Programme: Electrical Engineering
Supervisor: Kimmo Kauhaniemi
Instructor: Marko Moisio
Year of graduation: 2025 **Number of pages:** 116

ABSTRACT:
The objective of this thesis is to study the mathematical nature of the field theory describing electric and magnetic fields. The aim is to show how good mathematical skills support the learning and understanding of field theory.

The choice of the topic is justified by the experience that perceiving the connection between field theory and the mathematics used in it, as well as learning them in general, is proven to be significantly difficult. This thesis aims to present certain basic concepts of field theory and mathematics in a logical and coherent manner, and thus motivate the learning of mathematics to such an extent that it is genuinely possible to apply it when studying field theory.

The thesis first describes mathematical concepts that are closely related to the electromagnetic field theory. This section primarily addresses vector analysis meaning the differential and integral calculus of vector fields, and the change of variables. The mathematical concepts are presented as definitions and results derived from them, some of which are proved in the thesis. The concepts are intended to be described in such a way that, by referring to them in the following chapters of the thesis, it is possible to simplify the description of field theory concepts. The purpose of this method is to lighten the content of the section addressing the field theory and at the same time illustrate the importance of mathematics in accordance with the objectives of the thesis.

The content of the chapters explaining the theory of electric and magnetic fields is built around the Maxwell equations and the Lorentz force, which the theory is largely based on. It describes static electric fields caused by electric charges and Maxwell's I equation, also known as Gauss's law for electric fields. The electric current and the Lorentz force, as well as the connection between stationary currents and the static magnetic fields caused by them, are discussed. The Maxwell's II equation, which is the Gauss's law for magnetic fields, is derived.

In the next section, time-varying electromagnetic fields are presented. The Maxwell's IV equation, known as the Ampère-Maxwell law, is derived, and the concepts of electromotive force and electromagnetic induction are presented. The section addressing the electromagnetic induction is divided into situations where induction occurs due to the Lorentz force, the phenomenon described by Faraday's law also known as Maxwell's III equation, or both.

It is observed that the mathematical content presented in the initial part of the thesis is also substantially included in the entire part discussing field theory, and the usefulness of mathematical knowledge in terms of understanding field theory is stated. The content of the thesis can be expanded, for example, to the effect of materials on the behavior of electric and magnetic fields, and to the electromagnetic waves.

Keywords: field theory, electric fields, magnetic fields, vector analysis, Maxwell equations

Sisällys

1 Johdanto 8

2 Matemaattisia määritelmiä 10

2.1 Lineaarialgebran käsitteitä 10

2.1.1 Skalaarikolmitulo ja vektorikolmitulo 10

2.1.2 Oikeakätinen systeemi 11

2.1.3 Syklinen kanta 11

2.2 Vektorianalyysin käsitteitä 13

2.2.1 Vektorikenttä ja kenttäviivat 13

2.2.2 Parametrisoitu pinta 13

2.2.3 Säännöllinen käyrä ja säännöllinen pinta 13

2.2.4 Suunnattu pinta ja positiivisesti suunnattu reunakäyrä 14

2.2.5 Vektorikentän tekemä työ 15

2.2.6 Vektorikentän vuo 15

2.2.7 Gradientti 17

2.2.8 Jacobin matriisi ja Jacobin determinantti 17

2.2.9 Divergenssi ja vektorikentän lähteet ja nielut 18

2.2.10 Roottori 19

2.2.11 Gradientin roottori ja roottorin divergenssi 20

2.2.12 Divergenssilause 21

2.2.13 Stokesin lause 22

2.2.14 Konservatiivinen eli pyörteetön vektorikenttä ja skalaaripotentiaali 23

2.2.15 Lähteetön vektorikenttä ja vektoripotentiaali 25

2.3 Muuttujienvaihto, käyräviivainen koordinaatisto ja lokaali kanta 27

2.3.1 Diffeomorfismi 27

2.3.2 Muuttujienvaihto yleisesti käyräviivaisiin koordinaatteihin avaruudessa $\mathbb{R}^3$ 27

2.3.3 Lokaali kanta 29

2.3.4 Syklinen lokaali kanta 31

2.3.5 Muuttujienvaihto sylinterikoordinaatteihin ja sen lokaali kanta 33
2.3.6 Muuttujienvaihto pallokoordinaatteihin ja sen lokaali kanta 37
2.3.7 Kommentteja 42

3 Staattiset sähkökentät 44
3.1 Coulombin laki 44
3.2 Sähkökentän voimakkuus 45
3.3 Sähköstaattinen potentiaali ja työ sähkökentässä 46
3.4 Jatkuvat varausjakaumat ja niiden aiheuttamat sähkökentät 49
3.4.1 Tasaisen äärettömän viivavarausjakauman aiheuttama sähkökentän voimakkuus 51
3.5 Maxwellin I yhtälö: Gaussin laki sähkökentille 53
3.5.1 Laskuesimerkki: Sähkökenttien summa 55
3.5.2 Laskuesimerkki: Konservatiivisessa sähkökentässä tehtävä työ 58
3.5.3 Laskuesimerkki: Gaussin laki sähkökentille 62

4 Sähkövirta ja magneettikentät 64
4.1 Sähkövirta ja sähkövirrantiheys 64
4.2 Varauksen säilymislaki ja sähkövirran jatkuvuusyhtälö 65
4.3 Lorentzin voima 66
4.4 Magneettinen voima 67
4.5 Vakionopeudella liikkuvan pistevarauksen aiheuttama magneettikenttä ja oikean käden sääntö 68
4.6 Vakiovirran aiheuttama magneettikenttä: Biot’n ja Savartin laki 71
4.7 Maxwellin II yhtälö: Gaussin laki magneettikentille 75
4.8 Ampèren laki 77

5 Ajasta riippuvat sähkö- ja magneettikentät 82
5.1 Maxwellin IV yhtälö: Ampère-Maxwellin laki, ja siirrosvirran tiheys 82
5.2 Sähkömotorinen voima ja Faradayn induktiolaki 84
5.2.1 Sähkömotorinen voima 84
5.2.2 Faradayn induktiolaki 86

5.2.3 Liikkuvaan silmukkaan kohdistuva magneettikenttä 89
5.3 Maxwellin III yhtälö: Faradayn laki 92
5.3.1 Laskuesimerkki: Magneettikentän indusoima sähkökenttä 96
5.3.2 Maxwellin III yhtälö magneettikentässä liikkuvalle silmukalle 98

6 Johtopäätökset 102

Lähdeluettelo 105

Liitteet 106
Liite 1. Ketjusäännöt 106
Liite 2. Koordinaattijärjestelmien muuttujien välisiä riippuvuuksia 108
Liite 3. Tasaisen tasovarausjakauman aiheuttama sähkökentän voimakkuus 110
Liite 4. Pistemäisen lähteen aiheuttaman vektorikentän divergenssi 112
Liite 5. Taulukko vektorikenttien differentiaalioperaattorien identiteeteistä 114
Liite 6. Materiaaliderivaatta 115

Luettelo työssä esiintyvistä fysikaalisista suureista

Suureen kuvaus	**Symboli**	**Yksikkö**
Aika	t	s
Magneettinen vektoripotentiaali	$\mathbf{A}$	$\mathrm{Wb/m} = \mathrm{Vs/m}$
Magneettivuo	$\Phi_{\mathbf{B}}$	$\mathrm{Wb} = \mathrm{Vs}$
Magneettivuon tiheys	$\mathbf{B}$	$\mathrm{Wb/m^2} = \mathrm{Vs/m^2}$
Nopeus	$\mathbf{v}$ tai v	$\mathrm{m/s}$
Pintavaraustiheys	σ	$\mathrm{C/m^2}$
Pituus	$\mathbf{l}$ tai l	m
Potentiaalienergia	E_{pot}	J
Siirrosvirran tiheys	$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\mathrm{A/m^2}$
Sähkökentän voimakkuus	$\mathbf{E}$	$\mathrm{N/C} = \mathrm{V/m}$
Sähkökentän vuo	$\Phi_{\mathbf{E}}$	Vm
Sähkömotorinen voima	ε	$\mathrm{V} = \mathrm{J/C}$
Sähköstaattinen potentiaali	V	$\mathrm{V} = \mathrm{J/C}$
Sähköstaattinen potentiaaliero eli jännite	V tai U	$\mathrm{V} = \mathrm{J/C}$
Sähkövaraus	Q, q	$\mathrm{C} = \mathrm{As}$
Sähkövirran tiheys	$\mathbf{J}$	$\mathrm{A/m^2}$
Sähkövirta	I	A
Tilavuusvaraustiheys	ρ, ρ_v	$\mathrm{C/m^3}$
Tyhjiön permeabiliteetti	μ_0	$\mathrm{H/m} = \mathrm{Vs/Am}$
Tyhjiön permittiivisyys	ε_0	$\mathrm{F/m} = \mathrm{As/Vm}$
Työ	W	J
Viivavaraustiheys	λ	$\mathrm{C/m}$
Voima	$\mathbf{F}$	N

1 Johdanto

Työn tarkoitus on käsitellä perustasoisesti kenttäteorian ja sen kuvaamiseen käytettävän matematiikan yhteyttä. Kenttäteorialla tarkoitetaan tässä asiayhteydessä sähkökenttien ja magneettikenttien käyttäytymistä kuvaavaa teoriaa.

Kenttäteorian kuvaamiseen käytettävällä matematiikalla tarkoitetaan tässä ensisijaisesti vektorianalyysia, jossa sovelletaan differentiaali- ja integraalilaskentaa vektorifunktioille. Työn lukijalla odotetaan olevan perustiedot differentiaali- ja integraalilaskennasta sekä lineaarialgebrasta.

Sisällössä päähuomio on Maxwellin yhtälöiksi kutsutussa neljän yhtälön kokonaisuudessa. Siihen kuuluvat Gaussin laki sähkökentille, Gaussin laki magneettikentille, Faradayn laki ja Ampère-Maxwellin laki, jotka oleellisesti kuvaavat sähkö- ja magneettikenttien lainalaisuuksia. Työn rajauksessa materiaalien vaikutus on jätetty pois, ja on keskitytty ainoastaan siihen, miten Maxwellin yhtälöt ja Lorentzin voima kuvaavat sähkömagneettisen teorian.

Mikään käsite tai tulos, joka työssä esitetään, ei ole uusi tai sellainen, josta olisi aiemmin kirjoitettu vähän. Kenttäteoria on perustasollakin laaja aihe ja siitä on useita erinomaisia kirjoja. Siksi tässä ei ole pidetty mielekkäänä eikä tarpeellisena koettaa mahduttaa kenttäteorian koko keskeistä opetussisältöä opinnäytetyön sivumäärään.

Työn näkökulma ei myöskään ole ensisijaisesti pedagoginen siinä mielessä, että tässä ei tutkita eri tapoja opettaa kenttäteoriaa tai kokemuksia niistä. Pedagoginen näkökulma on kuitenkin ohjannut kirjoitusprosessia.

Kokemus on osoittanut, että sekä kenttäteorian että vektorianalyysin opiskelu tuottavat merkittäviä vaikeuksia. (Lähde: keskustelut Vaasan yliopiston opettajien kanssa.) Kenttäteorian opiskelu menestyksekkäästi tarvitsisi tuekseen matematiikkaa, mutta matematii-

kan opintojaksojen sisältöä ei osata riittävässä määrin soveltaa. Vaikeuksiin on sellaisiakin syitä, jotka eivät ole suoraan sidoksissa vain kenttäteorian tai vektorianalyysin opetukseen. Ilmiö motivoi kuitenkin rakentamaan siltaa näiden kahden oppiaineen välille, mihin tässä työssä osaltaan pyritään.

Tässä työssä on tausta-ajatuksena hyväksyä se, että kenttäteoria ja siihen liittyvä matematiikka voivat olla haastavia. Aihepiirissä, johon liittyy paljon laskemista, saattaisi helposti käydä niin, että opeteltavat asiat jäävät oppijan mielessä irrallisiksi esimerkeiksi. Tärkein lähtökohta on, että kun ymmärtää kenttäteorian taustalla olevaa matematiikkaa, ymmärtää paremmin myös sillä kuvattavia ilmiöitä. Riittävän vahva teoriapohja voi auttaa näkemään asiat kokonaisuuksina.

Työn rajaus on linjassa yllä todetun kanssa: työ ei voi eikä sen kannata yrittää kilpailla kenttäteoriaa käsittelevien kirjojen kanssa. Tämän on tarkoitus olla esitys, tai alku esitykselle, jonka tuella voidaan päästä joidenkin kenttäteorian ymmärtämistä haittaavien esteiden yli, ja joka voi auttaa tulkitsemaan kirjojen sisältöä.

2 Matemaattisia määritelmiä

Tässä luvussa esitetään työssä tarvittavia, vektorikenttien laskentaan liittyviä käsitteitä ja määritelmiä. Matemaattiset määritelmät on tässä työssä korostettu kursiivilla, eikä sama tapa ole käytössä kenttäteorian käsitteille.

2.1 Lineaarialgebran käsitteitä

Tämä osio sisältää määritelmiä, jotka liittyvät lineaarialgebraan, mutta joita sovelletaan myös vektorianalyysissä.

2.1.1 Skalaarikolmitulo ja vektorikolmitulo

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorien $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ *skalaarikolmitulo* on pistetulo, jonka toisena tekijänä on kahden vektorin ristitulo ja toisena kolmas näistä vektoreista. Skalaarikolmitulo on matriisin, jonka rivejä (tai sarakkeita) nämä vektorit ovat, determinantti (Adams & Essex, 2018, s. 590):

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \tag{1}$$

Skalaarikolmitulon itseisarvo on vektorien $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus.

Koska $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$, skalaarikolmitulon arvo ei muutu, jos vektorit $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ säilyttävät syklisen järjestyksensä. Syklisen järjestyksen menetys muuttaa skalaarikolmitulon etumerkin, esimerkiksi $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Jos $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$, on jokin vektoreista nollavektori, tai yksi vektoreista on esitettävissä kahden muun lineaarikombinaationa. Tällöin kaikki vektorit sijaitsevat samalla tasolla.

Avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektorien $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ *vektorikolmitulo* on ristitulo, jonka tekijöinä ovat yksi näistä vektoreista ja kahden muun vektorin ristitulo (Adams & Essex, 2018, s. 592):

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} \tag{2}$$

2.1.2 Oikeakätinen systeemi

Olkoot kolme avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoria $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$, joista yksikään ei ole nollavektori, ja olkoon α vektorien $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ välinen kulma siten, että $0 \leq \alpha \leq \pi$. Kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ muodostaa tässä syklisessä järjestyksessään *oikeakätisen systeemin*, jos $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, ja jos $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ muodostaa oikeakätisen systeemin jos ja vain jos $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$. Tämä on perusteltavissa skalaarikolmitulon (1) ja pistetulon ominaisuuksilla: $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos\alpha$, jossa kulman α arvoilla $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ on $\cos\alpha > 0$. (Moisio, 2025, s. 6.)

2.1.3 Syklinen kanta

Vektorit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$, joista yksikään ei ole nollavektori, muodostavat tässä syklisessä järjestyksessään avaruuden $\mathbb{R}^3$ *syklisen kannan*, jos $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u}$ ja $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Tämän määritelmän nojalla esimerkiksi luonnollinen kanta $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ on syklinen kanta (Moisio, 2025, s. 7-8).

Kun $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on syklinen kanta, niin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ja $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ (vastaavasti $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$). Syklinen kanta on siis ortogonaalinen. Edelleen, syklisen kannan ortogonaalisuuden nojalla $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|$, $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|$ ja $\|\mathbf{w} \times \mathbf{u}\| = \|\mathbf{w}\|\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. Tästä seuraa , että $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|$, joten $\|\mathbf{u}\| = 1$, ja vastaavasti $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$, joten syklinen kanta on myös ortonormaali.

Jos $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on syklinen kanta, niin $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 1$. Nimittäin, skalaarikolmitulon (1) ja syklisen kannan määritelmän sekä ortonormaalisuuden nojalla seuraa, että $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$. Syklinen kanta muodostaa siis myös oikeakätisen systeemin. (Moisio, 2025, s. 7-8.)

Seuraavaksi esitetään kaksi tapaa todeta kannan syklisyys.

Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ toisiaan vastaan kohtisuorat yksikkövektorit, ja olkoon $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Tällöin kolmikko $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on syklinen kanta. Tämä voidaan todistaa käyttäen ristitulon antikommutatiivisuutta ja vektorikolmituloa (2):

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \tag{3}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u} \tag{4}$$

$$\mathbf{w} \times \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{v} \tag{5}$$

Olkoon $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ortonormaali kanta. Jos tällöin $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 1$, kanta on syklinen. Koska ortonormaalissa kannassa $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa olevia yksikkövektoreita, riittää todistaa, että $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Nyt, koska $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \cos\alpha = 1$, jossa $\alpha \in [0, \pi]$ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ välinen kulma, ja koska $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = 1$, täytyy olla $\alpha = 0$, ja siis $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Nyt $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ on syklinen kanta, ja siten myös $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on syklinen kanta. (Moisio, 2025, s. 7-8.)

Syklisen kannan määritelmästä ja ristitulon antikommutatiivisuudesta seuraa, että jos syklisen kannan muodostavat vektorit esitetään muussa kuin syklisessä järjestyksessään, ja korvataan yksi tai kaikki näistä vektoreista vastavektorillaan, on näin muodostuva kolmikko syklinen kanta. Esimerkiksi, kolmikko $(\mathbf{u}, -\mathbf{w}, \mathbf{v})$ on syklinen kanta jos ja vain jos $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ on syklinen kanta.

2.2 Vektorianalyysin käsitteitä

2.2.1 Vektorikenttä ja kenttäviivat

Vektorifunktio eli *vektorikenttä* $\mathbf{f}$ liittää jokaiseen määrittelyjoukkonsa $U \in \mathbb{R}^n$ pisteeseen avaruuden $\mathbb{R}^m$, jossa $m \geq 2$, alkion eli vektorin. Vektorifunktion *komponenttifunktiot* ovat *skalaarifunktioita*, eli kuvauksia joukosta U joukkoon $\mathbb{R}$. Vektorifunktio on *säännöllinen*, jos kaikki sen komponenttifunktiot ovat riittävän monta kertaa derivoituvia jokaisen muuttujansa suhteen. (Adams & Essex, 2018, s. 867; Moisio, 2025, s. 14.)

Kenttäviivat eli *integraalikäyrät* kuvaavat vektorikentän käyttäytymistä siten, että niiden jokaisessa pisteessä jokin kentän vektori on kenttäviivan tangentin suuntavektori. Kenttäviiva riippuu vain kentän suunnasta, eivät suuruudesta, ja kentän voimakkuutta kuvataan kenttäviivojen tiheytenä. (Adams & Essex, 2018, s. 869; Griffiths, 2013, s. 67.)

2.2.2 Parametrisoitu pinta

Parametrisoitu pinta $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ on jatkuva kuvaus uv-tason suorakulmiosta avaruuteen $\mathbb{R}^3$. Funktion $z = f(x, y)$ määräämä pinta voidaan parametrisoida muotoon $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$, jolloin se on kuvaus xy-tason suorakulmiosta avaruuteen $\mathbb{R}^3$. (Adams & Essex, 2018, s. 896.)

2.2.3 Säännöllinen käyrä ja säännöllinen pinta

Käyrä $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ on *säännöllinen käyrä*, jos se on jatkuvasti derivoituva siten, että $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \neq 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Tällöin käyrällä on jatkuvasti kääntyvä tangentti- (Adams & Essex, 2018, s. 644.)

Olkoon joukko $S \in \mathbb{R}^3$ yhtälön $g(x, y, z) = 0$ toteuttava pinta siten, että $g(x, y, z)$ on riittävän monta kertaa derivoituva. Pinta on *säännöllinen pinta*, jos jokainen pinnan piste on

sisäpiste funktion $g(x, y, z)$ määrittelyjoukkoon kuuluvassa avoimessa palloympäristössä, ja jos jokaisessa pinnan sisäpisteessä funktion g kokonaisderivaatta on nollavektorista eroava:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k} \neq \mathbf{0}. \tag{6}$$

Tällöin jokaiseen pinnan sisäpisteeseen voidaan asettaa yksikäsitteinen tangenttitaso, jonka normaali on nollavektorista eroava, ja tangenttitason normaali on myös pinnan normaali. (Adams & Essex, 2018, s. 898.)

Parametrisoitu pinta $S = \mathbf{r}(u, v)$ on säännöllinen, jos kuvaus $\mathbf{r}$ on jatkuvasti derivoituva injektio, jonka osittaisderivaatat eli pinnan tangenttivektorit $\mathbf{r}_u$ ja $\mathbf{r}_v$ eivät ole yhdensuuntaisia. Tällöin pinnan normaalivektori $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ kaikissa pinnan sisäpisteissä. (Adams & Essex, 2018, s. 899.)

2.2.4 Suunnattu pinta ja positiivisesti suunnattu reunakäyrä

Tämä luku perustuu lähteeseen Adams & Essex, 2018, s. 907-908.

Säännöllinen pinta S avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on *suuntautuva*, jos jokaisessa pinnan pisteessä P on olemassa jatkuva yksikkövektorikenttä $\mathbf{n}(P)$, joka on jokaisessa pisteessä pinnan S normaali, ja jos pinnalla on kaksi puolta. Esimerkiksi, säännöllisen funktion $z = f(x, y)$ määräämän pinnan $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$ yksikkönormaali $\mathbf{n}(x, y)$ on:

$$\mathbf{n}(x, y) = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\|} = \frac{-f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \tag{7}$$

Yksikkövektorikentän $\mathbf{n}(P)$ suunta määrää pinnan suuntauksen: se pinnan puoli, josta yksikkönormaali osoittaa ulospäin, on pinnan positiivinen puoli, ja toinen puoli negatiivinen.

Säännöllinen tai paloittain säännöllinen pinta voi olla umpinainen, tai sillä voi olla yksi tai useampi reunakäyrä. Kentän $\mathbf{n}(P)$ ei tarvitse olla määritelty reunakäyrien pisteissä.

Suunnattu pinta S indusoi suuntauksen jokaiselle reunakäyrälleen C. Reunakäyrä on *positiivisesti suunnattu*, kun pinnan positiivinen puoli jää reunakäyrää vastapäivään kuljettaessa reunakäyrän vasemmalle puolelle kulkusuuntaan nähden.

Paloittain säännöllinen pinta on suuntautuva, jos sen muodostavista säännöllisista pinnoista aina vierekkäiset pinnat indusoivat reunakäyriensä niille osille, jotka yhdistävät nämä pinnat, vastakkaiset suuntaukset. Tällöin pintojen positiiviset puolet ovat liittyneinä yhteen siten, että ne yhdessä ovat koko paloittain säännöllisen pinnan positiivinen puoli.

2.2.5 Vektorikentän tekemä työ

Jatkuvan *vektorikentän* $\mathbf{f}$ pitkin säännöllistä käyrää C, jonka parametriesitys on $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3$, jossa $t \in [a, b]$, *tekemä työ* W määritellään käyräintegraalina pitkin käyrää C:

$$W = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \tag{8}$$

Kun $W > 0$, sanotaan, että kenttä $\mathbf{f}$ tekee työtä pisteestä a pisteeseen b pitkin käyrää C siirtyvään hiukkaseen. Kun taas $W < 0$, kenttä $\mathbf{f}$ tekee työtä hiukkasen liikettä vastaan. (Adams & Essex, 2018, s. 888.)

2.2.6 Vektorikentän vuo

Olkoon jatkuva vektorikenttä $\mathbf{f}$ ja suunnattu pinta S avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Määritellään *vektorikentän vuo* Φ suunnatun pinnan S, jonka yksikkönormaali on $\mathbf{n}$, läpi (Adams & Essex, 2018, s. 909-910):

$$\Phi = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{9}$$

Integroitava funktio voidaan esittää myös muodossa $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$, jossa $d\mathbf{S} = dS\,\mathbf{n}$. Tässä siis $d\mathbf{S}$ on suunnattu pintaelementti, jonka ala on dS.

Vuolla tarkoitetaan vektorikentän virtausta pinnan läpi. Termi $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ on vektorikentän $\mathbf{f}$ pinnan S yksikkönormaalin $\mathbf{n}$ suuntaisen projektiovektorin pituus (tai pituuden vastaluku), joka määrää *vuotiheyden* pinnan S jokaisessa pisteessä.

Kaavaa (9) käytettäessä on pinnan S puoleksi, josta yksikkönormaali $\mathbf{n}$ osoittaa ulospäin, valittava se, josta kentän virtauksen katsotaan tulevan ulos pinnasta. Jos nyt vuo on negatiivinen, on kentällä todellisuudessa enemmän virtausta yksikkönormaalin vastaisesti kuin suuntaisesti. Vuotiheyden ei tarvitse olla jokaisessa pinnan S pisteessä positiivinen, vaan kentällä voi olla virtausta sekä ulospäin että sisäänpäin, ja kaava (9) määrittää näiden virtausten erotuksen.

Vuo voidaan laskea myös umpinaisen pinnan S läpi kaavaa (9) vastaavana suljettuna pintaintegraalina. Tällöinkin pinnan yksikkönormaalin suunta valitaan sen mukaisesti, määritetäänkö vuota pinnasta ulospäin, jolloin yksikkönormaalikin osoittaa ulospäin, vai määritetäänkö vuota sisäänpäin.

Jos pinnan S määrää parametriesitys $\mathbf{r}(u, v)$ siten, että $S = \mathbf{r}(A)$, jossa A on uv-tason suorakulmio, vuo pinnan normaalivektorin $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ suuntaisesti määritetään seuraavasti (Moisio, 2025, s. 89):

$$\Phi = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_A \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{N}(u, v) du dv \tag{10}$$

Tässä $dS = \|\mathbf{N}(u, v)\|\, du dv$, ja $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{N}(u, v)}{\|\mathbf{N}(u, v)\|}$.

2.2.7 Gradientti

Usean muuttujan skalaarifunktiolla f, jolla on olemassa ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat jokaisen muuttujansa suhteen määrittelyjoukkonsa pisteessä $\mathbf{x}$, on pisteessä $\mathbf{x}$ olemassa sen kokonaisderivaatta *gradientti* $\nabla f(\mathbf{x})$. Gradientti on vektori, jonka komponenttifunktioina ovat kaikki skalaarifunktion osittaisderivaatat. Esimerkiksi kolmen muuttujan skalaarifunktion gradientti määritellään seuraavasti (Adams & Essex, 2018, s. 914):

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \tag{11}$$

Skalaarifunktio f kasvaa pisteessä $\mathbf{x}$ voimakkaimmin gradientin $\nabla f(\mathbf{x})$ suuntaan ja vähenee voimakkaimmin gradientin vastavektorin $-\nabla f(\mathbf{x})$ suuntaan.

Gradienttivektori on *tasa-arvopinnan* normaali (Adams & Essex, 2018, s. 724). Tasa-arvopinnalla tarkoitetaan niiden pisteiden joukkoa, jotka toteuttavat yhtälön $f(\mathbf{x}) = c$, jossa c on jokin kiinnitetty vakio (Adams & Essex, 2018, s. 876).

Liitteessä 1 on esitetty, miten määritetään yhdistetyn funktion, jossa sisäfunktiona on vektorifunktio, gradientti.

2.2.8 Jacobin matriisi ja Jacobin determinantti

Jacobin matriisi on vektorifunktion kokonaisderivaatta, joka sisältää vektorifunktion jokaisen komponenttifunktion osittaisderivaatat jokaisen muuttujan, josta vektorifunktio riippuu, suhteen. Matriisin rivit ovat komponenttifunktioiden kokonaisderivaattoja eli gradientteja, ja toisaalta sarakkeet ovat vektorifunktion osittaisderivaattoja kunkin sen muuttujan suhteen. Vektorifunktio on differentioituva, jos sen Jacobin matriisin jokainen alkio on jatkuva. (Adams & Essex, 2018, s. 716.)

Kun vektorifunktio on kuvaus joukosta $\mathbb{R}^n$ joukkoon $\mathbb{R}^n$, on sen Jacobin matriisi neliömatriisi. Tällöin Jacobin matriisilla on determinantti, jota kutsutaan *Jacobin determinantiksi* (Adams & Essex, 2018, s. 719 ja 739).

Liitteessä 1 on esitetty, miten yhdistetyn funktion Jacobin determinantti määritellään.

2.2.9 Divergenssi ja vektorikentän lähteet ja nielut

Vektorifunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, jolla on kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat pisteessä $\mathbf{x}$, *divergenssi* $\nabla \cdot \mathbf{f}$ pisteessä $\mathbf{x}$ määritellään raja-arvona (Adams & Essex, 2018, s. 916):

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathrm{vol}(R)\to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}(R)} \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{12}$$

Tässä R on kappale, $\mathrm{vol}(R)$ on kappaleen tilavuus, ja S on kappaleen pinta. $\mathbf{n}$ on pinnan S ulospäin osoittava yksikkönormaali. Pintaintegraali $\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS$ antaa kentän $\mathbf{f}$ vuon pinnan S läpi. Vuo jaetaan kappaleen tilavuudella ja annetaan tilavuuden lähestyä nollaa. Divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{f}$ kertoo siis vektorikentän $\mathbf{f}$ vuotiheyden kussakin pisteessä.

Divergenssi on skalaarifunktio. Se kuvaa vektorikentän lähteisyyttä siten, että niissä pisteissä, joissa $\nabla \cdot \mathbf{f} > 0$, sijaitsee *vektorikentän lähde*, ja niissä pisteissä, joissa $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$, sijaitsee *vektorikentän nielu*. Pisteissä, joissa $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$, kenttä on lähteetön.

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ kentän $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$ divergenssi voidaan laskea kaavalla (Adams & Essex, 2018, s. 915):

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{13}$$

Huomautus: Adams & Essex esittävät kaavan (13) divergenssin määritelmänä, ja todistavat sitten kaavan (12) (Adams & Essex, 2018, s. 916-917).

Divergenssiä voi auttaa ymmärtämään seuraava havainnollistus. Kuvitellaan särmiö, johon vektorikentän kenttäviivoja menee sisään, ja josta niitä tulee ulos. Särmiö on lisäksi mielivaltaisen pieni siten, että sen voidaan ajatella sijaitsevan yksittäisessä koordinaatiston pisteessä. Jos särmiöstä tulee ulos enemmän kenttäviivoja kuin siihen menee sisään, pisteessä on vektorikentän lähde. Jos kenttäviivoja tulee ulos vähemmän kuin menee sisään, pisteessä on vektorikentän nielu. Jos ulos- ja sisäänmenevien viivojen määrä on sama, kentällä ei ole kyseisessä pisteessä lähdettä.

2.2.10 Roottori

Vektorikentän $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, jolla on kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat avaruudessa $\mathbb{R}^3$ tai siihen sisältyvässä alueessa, *roottori* $\nabla \times \mathbf{f}$ on (Adams & Essex, 2018, s. 915-922):

$$\nabla \times \mathbf{f} = \Big(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\Big)\mathbf{i} + \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\Big)(-\mathbf{j}) + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big)\mathbf{k} \tag{14}$$

Kaava (14) voidaan esittää kompaktimmin käyttäen determinanttia:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \tag{15}$$

Jos $\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ jossakin pisteessä $\mathbf{x}$, kentällä on tässä pisteessä *pyörre*. Jos $\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ jossakin alueessa, kenttä $\mathbf{f}$ on kyseisessä alueessa *pyörteetön*.

Toisin kuin divergenssin tapauksessa, roottori on vektori eli sillä on suunta. Niinpä pyörteen vaikutusta tarkastellaan johonkin suuntaan nähden. Jos siis kentällä $\mathbf{f}$ on pisteessä $\mathbf{x}$ pyörre, määritellään yksikkönormaali $\mathbf{n}$, joka osoittaa pisteestä $\mathbf{x}$ valittuun suuntaan.

Seuraava lauseke antaa roottorivektorin $\nabla \times \mathbf{f}$ kohtisuoran projektion vektorilla $\mathbf{n}$:

$$(\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \tag{16}$$

Tämä projektiovektori on kentän $\mathbf{f}$ *pyörintävektori* pisteessä $\mathbf{x}$. Luku $\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$, joka positiivisena on pyörintävektorin pituus ja negatiivisena pituuden vastaluku, on kentän $\mathbf{f}$ *pyörintätiheys* yksikkönormaalin $\mathbf{n}$ ympäri pisteessä $\mathbf{x}$. Pistetulolle ominaisesti, mitä yhdensuuntaisempia roottori ja yksikkönormaali ovat, sitä suurempi pyörintätiheys on itseisarvoltaan. Pyörintätiheys on 0 riippumatta siitä, mitä suuntaa pisteestä $\mathbf{x}$ katsoen tarkastellaan, vain silloin kun $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Pyörinnän olemassaoloa voidaan havainnollistaa siten, että pyörintävektorin $\nabla \times \mathbf{f}$ ympärillä on kuvaannollisesti mielivaltaisen pieniä siipirattaita, joihin vektorikentän $\mathbf{f}$ tangentiaalikomponentti tekee nollasta eroavaa työtä.

Kentän pyörintätiheys $\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ voidaankin nähdä eräänlaisena raja-arvona työ- eli käyräintegraalista (Adams & Essex, 2018, s. 921):

$$\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \tag{17}$$

Vektorikenttä, jolla on nollavektorista eroava roottori, ei välttämättä näytä pyörteiseltä. Esimerkiksi kenttä $\mathbf{f}(x, y, z) = x\mathbf{j}$ kuvaa xy-tasolla tapahtuvaa y-akselin suuntaista liikettä, ja $\nabla \times \mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ (Adams & Essex, 2018, s. 922).

2.2.11 Gradientin roottori ja roottorin divergenssi

Olkoon kaksi funktion $f(\mathbf{x})$ n:nen kertaluvun osittaisderivaattaa siten, että osittaisderivaatat on määritetty molemmissa tapauksissa samojen muuttujan $\mathbf{x}$ komponenttien suhteen, mutta eri järjestyksessä. Jos nämä osittaisderivaatat ovat jatkuvia pisteessä x_0, ja

jos f ja kaikki sen osittaisderivaatat kertalukun $n-1$ asti ovat jatkuvia pisteen x_0 jossakin ympäristössä, kyseiset osittaisderivaatat ovat yhtä suuret pisteessä x_0. (Adams & Essex, 2018, s. 698.)

Ylläolevaa lausetta voidaan soveltaa myös vektorifunktion komponenttifunktioille, jotka täyttävät lauseen ehdot. Sen nojalla, että osittaisderivaattojen laskujärjestystä voidaan vaihtaa, kahdesti jatkuvasti derivoituvalle funktiolle $f(x, y, z)$ seuraa:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} \tag{18}$$

Gradientin roottori on nollavektori, gradienttivektorikenttä on siis pyörteetön.

Edelleen soveltamalla ylläolevaa lausetta funktiolle $\mathbf{f}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, jonka komponenttifunktiot ovat kahdesti jatkuvasti derivoituvia, seuraa:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0 \tag{19}$$

Roottorin divergenssi on nolla, joten kenttä, joka on toisen vektorikentän roottori, on lähteetön.

2.2.12 Divergenssilause

Olkoon $V \in \mathbb{R}^3$ umpinaisen säännöllisen pinnan ∂V rajaama kappale, ja olkoon $\mathbf{n}$ pinnan ∂V yksikkönormaali. Tällöin alueessa V jatkuvasti derivoituvalle vektorikentälle $\mathbf{f}$ pätee *divergenssilause* eli *Gaussin divergenssilause*. Se yhdistää toisiinsa vektorikentän vuon umpinaisen pinnan läpi, sekä vektorikentän divergenssin tilavuusintegraalin kyseisen pinnan rajaaman kappaleen yli (Adams & Essex, 2018, s. 933):

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV \tag{20}$$

Kuten luvussa 2.2.9 on todettu, divergenssi kuvaa vektorikentän lähteisyyttä. Divergenssilauseen oikea puoli laskee yhteen kaikki vektorikentän $\mathbf{f}$ lähteet ja nielut kappaleessa V, ja vasen puoli laskee yhteen vektorikentän $\mathbf{f}$ koko nettovuon kappaleen V pinnan läpi.

Maxwellin yhtälöissä divergenssilause yhdistää toisiinsa Gaussin lain sähkökentille (Maxwellin I yhtälö) differentiaalimuodon ja integraalimuodon, sekä Gaussin lain magneettikentille (Maxwellin II yhtälö) differentiaalimuodon ja integraalimuodon, joita käsitellään myöhemmin.

2.2.13 Stokesin lause

Olkoon S paloittain säännöllinen, suunnattu pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}$ pinnan yksikkönormaalikenttä ja reunakäyrä ∂S paloittain säännöllinen, pinnan S suuntaama suljettu käyrä tai suljettujen käyrien yhdiste. Jos $\mathbf{f}$ on säännöllinen ja määritelty pinnan S sisältävässä avoimessa joukossa, niin se toteuttaa *Stokesin lauseen*, joka yhdistää toisiinsa vektorikentän tekemän työn kuljettaessa kerran umpinaisen käyrän ympäri sekä vektorikentän roottorin vuon kyseisen käyrän rajaaman pinnan läpi (Adams & Essex, 2018, s. 940):

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \tag{21}$$

Kappaleessa 2.2.10 esitetyn mukaisesti luku $(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}$ kuvaa kentän $\mathbf{f}$ pyörintätiheyttä, joka kuvaa kentän kykyä tehdä työtä tangentiaaliseen suuntaan pyörintävektorista nähden. Tämä työ voidaan nähdä hyvin pienenä käyräintegraalina. Kaikki tällaiset pienet käyräintegraalit pinnassa S lasketaan yhteen Stokesin lauseen vasemmalla puolella, mistä saadaan kokonaistyö kuljettaessa kerran pinnan reunaa ∂S pitkin. Stokesin lauseen paikkansapitävyyttä perustellaan pinnan S muodostavien pienten pintojen ja niiden reunakäyrien suuntauksilla. (Adams & Essex, 2018, s. 940.)

Stokesin lause havainnollistaa, että vektorikentässä on oltava pyörteisyyttä, jotta tehty työ kuljettaessa umpinaisen käyrän ympäri on nollasta eroava. Maxwellin yhtälöissä Sto-

kesin lause yhdistää toisiinsa Faradayn lain (Maxwellin III yhtälö) differentiaalimuodon ja integraalimuodon, sekä Ampère-Maxwellin lain (Maxwellin IV yhtälö) differentiaalimuodon ja integraalimuodon, joita käsitellään myöhemmin.

2.2.14 Konservatiivinen eli pyörteetön vektorikenttä ja skalaaripotentiaali

Määritelmä: Jos on olemassa skalaarifunktio $F(x, y, z)$ ja vektorifunktio $\mathbf{f}(x, y, z)$ siten, että $\mathbf{f} = \nabla F$ jossakin alueessa D, niin $\mathbf{f}$ on konservatiivinen vektorikenttä alueessa D ja F on vektorikentän $\mathbf{f}$ *skalaaripotentiaali* eli *potentiaali*. Tämä luku perustuu lähteeseen Adams & Essex, 2018, s. 874, 876, 891 ja 925.

Koska gradientti ∇F on tasa-arvopinnan $F(x, y, z) = c$ normaali, konservatiivisen kentän kenttäviivat leikkaavat tasa-arvopintoja kohtisuorassa kulmassa. Tasa-arvopinnan pisteiden voidaan sanoa olevan samassa potentiaalissa, koska skalaarifunktio $F(x, y, z)$ on pinnan normaalivektorin ∇F potentiaali ja saa saman arvon jokaisessa pinnan pisteessä.

Konservatiivinen vektorikenttä $\mathbf{f}$ on *pyörteetön*, siis $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$. Nimitysten konservatiivinen vektorikenttä ja pyörteetön vektorikenttä ohella siitä käytetään muun muassa termiä gradienttikenttä. Erityisesti pyörteettömästä sähkökentästä käytetään myös nimeä staattinen sähkökenttä.

Tunnetun konservatiivisen vektorikentän potentiaalifunktio on vakiota vaille yksikäsitteisesti määrätty. Tämä on perusteltavissa integraalilaskennan peruslauseella, jonka mukaan suljetulla välillä jatkuva funktio, jonka derivaatta vastaavan avoimen välin jokaisessa pisteessä on nolla, on kyseisellä suljetulla välillä vakiofunktio. Näin ollen tällaisen vektorikentän kukin komponenttifunktio voi muodostua vain vakiota vaille yksikäsitteisen skalaarifunktion osittaisderivaattana.

Potentiaalifunktion yksikäsitteinen määrittäminen vaatii siis konservatiivisen vektorikentän tuntemisen lisäksi riittävät reunaehdot. Kuitenkin, ilman reunaehtojakin potentiaa-

liero $F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)$, jossa $\mathbf{x}_0$ ja $\mathbf{x}$ ovat funktion $\mathbf{f}$ määrittelyjoukon pisteitä, on yksikäsitteinen, koska sitä määritettäessä potentiaalifunktion vakiotermi kumoutuu.

Konservatiivisen vektorikentän ominaisuus on, että käyräintegraalin $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$ arvo ei riipu valitusta (paloittain) jatkuvasti derivoituvasta integrointikäyrästä C, vaan ainoastaan käyrän alkupisteestä $\mathbf{x}_0$ ja loppupisteestä $\mathbf{x}$ siten, että:

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0) \tag{22}$$

jossa F on vektorifunktion $\mathbf{f}$ skalaaripotentiaali. Siten konservatiivisen vektorikentän tekemä työ on potentiaaliero.

Konservatiiviselle vektorikentälle voidaan esittää seuraava yhteenveto: Olkoon D avoin, yhtenäinen alue, ja olkoon $\mathbf{f}$ alueessa D määritelty ja riittävän monta kertaa derivoituva vektorikenttä. Tällöin kolme seuraavaa ehtoa ovat ekvivalentteja siten, että jos yksi niistä on tosi, myös kaksi muuta ovat tosia:

1. $\mathbf{f}$ on konservatiivinen alueessa D
2. $\oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = 0$ jokaiselle paloittain säännölliselle, umpinaiselle käyrälle $C \in D$
3. Jokaiselle paloittain säännölliselle käyrälle $C \in D$ käyräintegraalin $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$ arvo riippuu vain integrointipolun C alku- ja loppupisteistä, ja on riippumaton alku- ja loppupisteitä yhdistävän polun valinnasta.

Jos lisäksi alue D on yhdesti yhtenäinen, Stokesin lauseen (21) nojalla voidaan lisätä listaan neljäs ehto:

4. $\mathbf{f}$ on pyörteetön alueessa D

Konservatiivisen vektorikentän pyörteettömyyttä voidaan perustella kaavalla (18), jonka mukaan gradientin roottori on nollavektori. Perustelu sille, että pyörteetön vektorikenttä on aina gradienttikenttä, sivuutetaan tässä.

Konservatiivisen vektorikentän kenttäviivat eivät muodosta suljettuja silmukoita. Jos muodostaisivat, tällöin yllä mainitun ehdon 2 ja sen, että konservatiivisen kentän tekemä työ on potentiaaliero, nojalla gradienttivektorin suunnan pitäisi voida olla paitsi matalammasta potentiaalista korkeampaan, myös korkeammasta potentiaalista matalampaan. Jälkimmäinen olisi ristiriidassa gradientin määritelmän kanssa, jonka mukaan skalaarifunktio kasvaa voimakkaimmin gradienttinsa suuntaan.

Käyräintegraali pyörteettömässä vektorikentässä voidaan laskea, paitsi potentiaalierona kaavan (22) mukaisesti, myös käyräintegraalina valiten integrointikäyräksi C sellainen (paloittain) jatkuvasti derivoituva käyrä, jota pitkin integrointi on mahdollisimman yksinkertaista. Käyräksi voidaan valita esimerkiksi koordinaattiakselien suuntaisten käyrien yhdiste. (Ks. myös laskuesimerkki 3.5.2 sylinterikoordinaatiston lokaalissa kannassa, jota käsitellään luvussa 2.3.5.)

2.2.15 Lähteetön vektorikenttä ja vektoripotentiaali

Vektorikenttä $\mathbf{f}$ on *lähteetön vektorikenttä* (engl. ”solenoidal vector field”) alueessa D, jos $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ koko alueessa D. Tällöin siis vektorikentällä ei ole lähteitä eikä nieluja. Lähteettömällä vektorikentän kenttäviivoilla ei ole alkua eikä loppua; ne voivat olla suljettuja silmukoita, tai äärettömän pitkiä. (Adams & Essex, 2018, s. 926.)

Kuten on todettu kaavan (19) yhteydessä, vektorikentän roottori on lähteetön. Voidaan edelleen osoittaa, että jos kenttä on lähteetön, on olemassa vektorifunktio, jonka roottori lähteetön kenttä on. Tämä vektorifunktio on lähteettömän kentän *vektoripotentiaali*. (Adams & Essex, 2018, s. 926.)

Siis, jos $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}$, niin vektorifunktio $\mathbf{A}$ on kentän $\mathbf{f}$ vektoripotentiaali. Lisäksi tällöin $\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.

Kun siis on olemassa jatkuvasti derivoituvat vektorikentät $\mathbf{f}$ ja $\mathbf{A}$, joille $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}$, ja säännöllinen suunnattu pinta S, jonka reunakäyrä C on, niin Stokesin lauseen (21) nojalla seuraa:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \tag{23}$$

Tulos merkitsee sitä, että Stokesin lauseen nojalla vektorikentän $\mathbf{f}$, jolla on vektoripotentiaali $\mathbf{A}$, vuo pinnan S läpi on sama kaikille pinnoille, joiden reunakäyrä C on. Jos siis kentän $\mathbf{f}$ vuon määrittäminen on hankalaa pinnan muodon takia, vuointegraalin laskeminen mahdollisesti helpottuu, kun valitaan jokin toinen pinta, jolla on yhteinen reunakäyrä alkuperäisen pinnan kanssa. Tämä ei vaadi kentän $\mathbf{f}$ vektoripotentiaalin $\mathbf{A}$ tuntemista, vaan ainoastaan vektoripotentiaalin olemassaolon toteamista siten, että todistetaan kentän $\mathbf{f}$ olevan lähteetön. Näin tehden ei siis varsinaisesti lasketa käyttäen Stokesin lausetta, vaan hyödynnetään Stokesin lauseen seurausta.

Sille, että vektorikenttä $\mathbf{f}$ on lähteetön alueessa D, voidaan kiteyttää seuraavat neljä keskenään ekvivalenttia ehtoa (Griffiths, 2013, s. 54):

1. $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$ koko alueessa D.
2. Integraalin $\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS$ arvo riippuu vain pinnan S reunakäyrästä C.
3. $\oiint_s \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$ mille tahansa umpinaiselle pinnalle S.
4. On olemassa vektorikenttä $\mathbf{A}$, jolle $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Ehto 3 seuraa divergenssilauseesta (20).

2.3 Muuttujienvaihto, käyräviivainen koordinaatisto ja lokaali kanta

Tämä luku käsittelee avaruudessa $\mathbb{R}^3$ tapahtuvaa muuttujienvaihtoa karteesisista koordinaateista käyräviivaisiin koordinaatteihin ja erityisesti sylinteri- ja pallokoordinaatteihin, sekä muuttujienvaihdon lokaalia kantaa. Aiheen rajauksen tarkoitus on vastata erityisesti kenttäteorian, siten kuin sitä tässä työssä käsitellään, tarpeisiin. Luku perustuu lähteisiin Adams & Essex, 2018, s. 951-961 ja Moisio, 2025, s. 102-106.

2.3.1 Diffeomorfismi

Olkoot U ja V avoimia avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja, ja olkoon kuvaus $\mathbf{r} : U \to V$ jatkuvasti derivoituva bijektio. Jos kuvauksen $\mathbf{r}$ Jacobin determinantti on nollasta eroava kaikilla $\mathbf{u} \in U$, kuvaus $\mathbf{r}$ on *diffeomorfismi*.

Olkoot U ja W avoimia avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoja, ja olkoon joukko $U' \subseteq U$ nollamitallinen. Jos kuvaus $\mathbf{r} : U \setminus U' \to W$ on diffeomorfismi, *muuttujienvaihto* $(x_1, ..., x_n) = \mathbf{r}(u_1, ..., u_n)$ on *säännöllinen*. (Nollamitallisella joukolla tarkoitetaan sellaista joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukkoa, jolla on määriteltävissä oleva tilavuus, joka on 0. Esimerkiksi joukon $\mathbb{R}^3$ nollamitallisia osajoukkoja ovat pisteet, käyrät, pinnat ja näiden äärelliset yhdisteet.)

Diffeomorfismille pätee, että kuvauksen $\mathbf{r}$ Jacobin determinantti ja käänteiskuvauksen $\mathbf{r}^{-1}$ Jacobin determinantti ovat toistensa käänteislukuja (Adams & Essex, 2018, s. 838).

2.3.2 Muuttujienvaihto yleisesti käyräviivaisiin koordinaatteihin avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Olkoon säännöllinen muuttujienvaihto $(x, y, z) = \mathbf{r}(u, v, w)$ ja piste $\mathbf{u} = (u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$. Pistettä $\mathbf{u}$ kutsutaan muuttujienvaihdon *säännölliseksi pisteeksi*, ja pistettä $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ muuttujienvaihdon *kantapisteeksi*.

Säännöllisen pisteen $\mathbf{u}$ kautta kulkevat u-,v-, ja w-akselien suuntaiset suorat kuvautuvat xyz-avaruuden kantapisteen $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ kautta kulkeviksi koordinaattikäyriksi, jolloin muodostuu *käyräviivainen koordinaatisto*.

Siten xyz-avaruuden pisteen $\mathbf{r}(u_0, v_0, w_0)$ koordinaatit voidaan ilmoittaa käyräviivaisten koordinaattien u_0, v_0 ja w_0 avulla. Koska $\mathbf{r}$ on säännöllinen, koordinaattikäyrät eivät katkeile, niissä ei ole teräviä kärkiä eivätkä ne leikkaa itseään.

Käsitellään seuraavaksi pieniä siirtymiä koordinaattikäyrillä ja Jacobin determinanttia. Oletetaan, että muuttujienvaihdolla $\mathbf{r}(u, v, w)$ on olemassa pisteessä $\mathbf{u}$ kaikki 1. kertaluvun jatkuvat osittaisderivaatat; toisin sanoen sen komponenttifunktioilla r_1, r_2 ja r_3 on jatkuvat 1. kertaluvun osittaisderivaatat. Tällöin $\mathbf{r}$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{u}$.

Muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ kokonaisderivaatta eli sen Jacobin matriisi:

$$\mathrm{D}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial u} & \dfrac{\partial r_1}{\partial v} & \dfrac{\partial r_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial u} & \dfrac{\partial r_2}{\partial v} & \dfrac{\partial r_2}{\partial w} \\ \dfrac{\partial r_3}{\partial u} & \dfrac{\partial r_3}{\partial v} & \dfrac{\partial r_3}{\partial w} \end{bmatrix} \tag{24}$$

Jacobin matriisin sarakkeet ovat siis muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ osittaisderivaatat muuttujien u, v ja w suhteen:

$$\mathrm{D}\mathbf{r} = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w) \tag{25}$$

Nämä osittaisderivaatat ovat koordinaattikäyrien tangenttivektoreita. Koska säännöllisellä muuttujanvaihdolla $\mathbf{r}$ Jacobin determinantti $\det(\mathrm{D}\mathbf{r}) \neq 0$, yksikään tangenttivektoreista ei ole nollavektori.

2.3.3 Lokaali kanta

Kun muuttujienvaihdon osittaisderivaatat jaetaan pituuksillaan, saadaan koordinaattikäyrien yksikkötangenttivektorit, jotka muodostavat muuttujienvaihdon $(x, y, z) = \mathbf{r}(u, v, w)$ *lokaalin kannan* pisteessä $\mathbf{r}(\mathbf{u})$:

$$\hat{\mathbf{e}}_u = \frac{\mathbf{r}_u(\mathbf{u})}{\|\mathbf{r}_u(\mathbf{u})\|}, \hat{\mathbf{e}}_v = \frac{\mathbf{r}_v(\mathbf{u})}{\|\mathbf{r}_v(\mathbf{u})\|}, \text{ ja } \hat{\mathbf{e}}_w = \frac{\mathbf{r}_w(\mathbf{u})}{\|\mathbf{r}_w(\mathbf{u})\|} \tag{26}$$

Ilmaus lokaali kanta korostaa sitä, että yksikkövektorit ovat yleisesti ottaen riippuvaisia kunkin pisteen $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ käyräviivaisista koordinaateista u, v ja w, ja lokaali kanta eroaa näin oleellisesti esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollisesta kannasta $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ myös sijaiten tässä avaruudessa. Tämä havainnollistuu sylinteri- ja pallokoordinaatiston yhteydessä.

Lokaali kanta voidaan asettaa vain muuttujienvaihdon kantapisteeseen, eli sellaiseen pisteeseen, jossa muuttujienvaihdon Jacobin determinantti on nollasta eroava, ja jossa siten jokainen koordinaattikäyrän tangenttivektori on olemassa, eli nollavektorista eroava.

Tangenttivektorien $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_w$ pituudet muodostavat muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ *skaalaustekijät* pisteessä $\mathbf{u}$:

$$h_u = \|\mathbf{r}_u(\mathbf{u})\|, h_v = \|\mathbf{r}_v(\mathbf{u})\| \text{ ja } h_w = \|\mathbf{r}_w(\mathbf{u})\| \tag{27}$$

Muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ differentioituvuuden geometrisena tulkintana seuraa, että siirtymä $d\mathbf{u} = (du, dv, dw)$ pisteessä $\mathbf{u}$ kuvautuu pisteessä $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ siirtymäksi $d\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}_u(\mathbf{u})du + \mathbf{r}_v(\mathbf{u})dv + \mathbf{r}_w(\mathbf{u})dw$. Tämä siirtymä voidaan esittää skaalaustekijöiden ja lokaalin kannan yksikkövektorien avulla:

$$d\mathbf{r}(\mathbf{u}) = h_u\hat{\mathbf{e}}_u(\mathbf{u})du + h_v\hat{\mathbf{e}}_v(\mathbf{u})dv + h_w\hat{\mathbf{e}}_w(\mathbf{u})dw \tag{28}$$

Edelleen, uvw-koordinaatiston koordinaattiakselien suuntaiset pienet siirtymät kuvautuvat seuraavasti:

$$du\mathbf{i} \mapsto h_u du\hat{\mathbf{e}}_u \tag{29}$$

$$dv\mathbf{j} \mapsto h_v dv\hat{\mathbf{e}}_v \tag{30}$$

$$dw\mathbf{k} \mapsto h_w dw\hat{\mathbf{e}}_w \tag{31}$$

Käsitellään tilavuus- ja pintalementtien skaalautumista muuttujienvaihdossa $\mathbf{r}(\mathbf{u})$. uvw-koordinaatiston pieni suorakulmainen särmiö, jonka sivut ovat du, dv ja dw, kuvautuu suuntaissärmiöksi sivuinaan $\mathbf{r}_u du = h_u du\hat{\mathbf{e}}_u$, $\mathbf{r}_v dv = h_v dv\hat{\mathbf{e}}_v$, ja $\mathbf{r}_w dw = h_w dw\hat{\mathbf{e}}_w$. Suuntaissärmiön tilavuus on:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_u du \cdot \mathbf{r}_v dv \times \mathbf{r}_w dw| &= |h_u du\hat{\mathbf{e}}_u \cdot h_v dv\hat{\mathbf{e}}_v \times h_w d_w\hat{\mathbf{e}}_w| \\ &= |\det(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)|h_u h_v h_w du dv dw \end{aligned} \tag{32}$$

Näin ollen uvw-avaruuden tilavuuselementti $dudvdw$ skaalautuu $|\det(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)|h_u h_v h_w$-kertaiseksi siirryttäessä muuttujienvaihdon lokaaliin kantaan $(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)$.

uvw-koordinaatiston pieni suorakulmio, jonka sivut ovat du ja dv ($dw = 0$), kuvautuu suunnikkaaksi sivuinaan $\mathbf{r}_u = h_u du\hat{\mathbf{e}}_u$ ja $\mathbf{r}_v = h_v dv\hat{\mathbf{e}}_v$. Suunnikkaan pinta-ala on:

$$\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = \|h_u du\hat{\mathbf{e}}_u \times h_v dv\hat{\mathbf{e}}_v\| = \|\hat{\mathbf{e}}_u \times \hat{\mathbf{e}}_v\|h_u h_v du dv \tag{33}$$

Näin ollen uvw-avaruuden pintaelementti $dudv$ skaalautuu $\|\hat{\mathbf{e}}_u \times \hat{\mathbf{e}}_v\|h_u h_v$-kertaiseksi siirryttäessä muuttujienvaihdon lokaaliin kantaan. Suorakulmio, jonka sivut ovat du ja dw ($dv = 0$), ja suorakulmio, jonka sivut ovat dv ja dw ($du = 0$), kuvautuvat ja niiden pinta-alat skaalautuvat vastaavasti.

2.3.4 Syklinen lokaali kanta

Yllä on käsitelty muuttujenvaihtoa $\mathbf{r}$ ja sen lokaalia kantaa ilman oletusta lokaalin kannan $(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)$ ortogonaalisuudesta ja täten myös ilman oletusta lokaalin kannan syklisyydestä.

Tarkastellaan tilannetta, jossa yksikkövektorit $(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa ja näin muodostavat ortonormaalin kannan.

Ristitulon määritelmän nojalla kahden toisiaan vastaan kohtisuorassa olevan yksikkövektorin ristitulon pituus on 1. Esimerkiksi $\|\hat{\mathbf{e}}_u \times \hat{\mathbf{e}}_v\| = 1$. Edelleen, $|\det(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)| = 1$

Nyt uvw-avaruuden tilavuuselementin $dudvdw$ ja pintaelementtien $dudv$, $dudw$ ja $dvdw$ skaalautuminen siirryttäessä muuttujienvaihdon lokaaliin kantaan tapahtuu suoraan skaalaustekijöiden h_u, h_v ja h_w tulona. Tilavuuselementti $dudvdw$ muuttuu $h_u h_v h_w$-kertaiseksi ja pintaelementti $dudv$ muuttuu $h_u h_v$-kertaiseksi. Tällöin siis uvw-avaruuden suorakulmainen särmiö $dudvdw$ kuvautuu suorakulmaiseksi särmiöksi $h_u h_v h_w dudvdw$, ja vastaavasti suorakulmio $dudv$ kuvautuu suorakulmioksi $h_u h_v dudw$.

Siis, jos kanta $\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w$ on ortonormaali, tilavuuselementti ja pintaelementit skaalautuvat seuraavasti:

$$dudvdw \mapsto dV = h_u h_v h_w dudvdw \tag{34}$$

$$dudv \mapsto dS = h_u h_v dudv \tag{35}$$

$$dudw \mapsto dS = h_u h_w dudw \tag{36}$$

$$dvdw \mapsto dS = h_v h_w dvdw \tag{37}$$

Kanta $(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)$ on syklinen, jos sen lisäksi, että vektorit ovat toisiinsa nähden kohtisuorassa olevia yksikkövektoreita, pätee: $\hat{\mathbf{e}}_u \times \hat{\mathbf{e}}_v = \hat{\mathbf{e}}_w$. Toisaalta, ortonormaali kanta $(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)$ on syklinen, jos ja vain jos $\det(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w) = 1$ (ks. 2.1.3).

Ortogonaalisen, ja siten myös syklisen, kannan vektorien määrittämä pinta on säännöllinen, koska sen vektorien ristitulo ei voi olla nollavektori.

Oletetaan nyt muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ lokaali kanta $(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)$ sykliseksi.

Tangenttivektorien $\mathbf{r}_u$ ja $\mathbf{r}_v$ määräämän pinnan normaalivektori $\mathbf{N}(u, v)$ on:

$$\mathbf{N}(u,v) = \mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v) = h_u \hat{\mathbf{e}}_u \times h_v \hat{\mathbf{e}}_v = h_u h_v \hat{\mathbf{e}}_w \tag{38}$$

Vastaavasti tangenttivektorien $\mathbf{r}_u$ ja $\mathbf{r}_w$ sekä $\mathbf{r}_v$ ja $\mathbf{r}_w$ määräämien pintojen normaalivektorit ovat:

$$\mathbf{N}(u,w) = \mathbf{r}_w(u,w) \times \mathbf{r}_u(u,w) = h_w \hat{\mathbf{e}}_w \times h_u \hat{\mathbf{e}}_u = h_u h_w \hat{\mathbf{e}}_v \tag{39}$$

$$\mathbf{N}(v,w) = \mathbf{r}_v(v,w) \times \mathbf{r}_w(v,w) = h_v \hat{\mathbf{e}}_v \times h_w \hat{\mathbf{e}}_w = h_v h_w \hat{\mathbf{e}}_u \tag{40}$$

Muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$, jonka lokaali kanta $(\hat{\mathbf{e}}_u, \hat{\mathbf{e}}_v, \hat{\mathbf{e}}_w)$ on, Jacobin determinantti on skaalaustekijöiden tulo: $\det(\mathrm{D}\mathbf{r}) = h_u h_v h_w$.

Kun siis suoritetaan avaruudessa $\mathbb{R}^3$ muuttujienvaihto, jonka lokaali kanta on syklinen, ei pinta- tai tilavuusintegraalia laskiessa välttämättä tarvitse johtaa pinnan normaalivektoria, vaan normaalivektorin pituus seuraa skaalaustekijöiden tulosta, ja vektorin suunta seuraa syklisen kannan vektorien tulosta.

Seuraavaksi tarkastellaan kenttäteorian sovellusten tarpeisiin sylinteri- ja pallokoordinaatistoja ja niiden lokaaleja kantoja.

2.3.5 Muuttujienvaihto sylinterikoordinaatteihin ja sen lokaali kanta

Karteesisen koordinaatiston pisteet (x, y, z) voidaan esittää *sylinterikoordinaattien* (ρ, φ, z) avulla seuraavasti:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi[\\ z = z, & z \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{41}$$

Yhtälöryhmä (41) esittää muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$, jossa $(x, y, z) = \mathbf{r}(\rho, \varphi, z)$ $= (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$, karteesisista koordinaateista sylinterikoodinaatteihin.

Muuttuja ρ kuvaa karteesisen koordinaatiston pisteen etäisyyttä z-akselista, ja φ on positiivisesti, eli xy-tasolla vastapäivään, suunnattu kulma luonnollisen kannan vektorilta $\mathbf{i}$ vektorille, joka on pisteen paikkavektorin projektio xy-tasolle. (Ks. myös liite 2.)

Yhtälöryhmässä on valittu sylinterikoordinaattien arvot siten, että muuttujienvaihto on bijektiivinen kuvaus $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kaikissa muuttujienvaihdon säännöllisissä pisteissä, ja näitä arvoja rajaamalla voidaan valita ne avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukot, joita kulloinkin käsitellään.

Kantapisteen $\mathbf{r}(\rho_0, \varphi_0, z_0)$ kautta kulkevat koordinaattikäyrät muodostavat kyseisessä pisteessä xyz-avaruuden sylinterikoordinaatiston ja luvut ρ_0, φ_0 ja z_0 ovat pisteen sylinterikoordinaatit.

Muuttujienvaihdon $\mathbf{r} = r_1\mathbf{i} + \mathbf{r}_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ Jacobin matriisi on:

$$\mathrm{D}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial \rho} & \dfrac{\partial r_1}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial r_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial \rho} & \dfrac{\partial r_2}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial r_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial r_3}{\partial \rho} & \dfrac{\partial r_3}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial r_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ Jacobin determinantti on:

$$\det(\mathrm{D}\mathbf{r}) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho \tag{43}$$

Muuttujienvaihdossa sylinterikoordinaatiston pieni tilavuusalkio $d\rho d\varphi dz$ kuvautuu siis karteesiseen koordinaatistoon tilavuusalkioksi $\rho\, d\rho d\varphi dz$.

Jotta muuttujienvaihto $\mathbf{r}$ olisi säännöllinen, täytyy sen Jacobin determinantin olla nollasta eroava, pois lukien mahdolliselle lähtöjoukon nollamitalliselle osajoukolle. Nyt $\det(\mathrm{D}\mathbf{r}) = \rho \neq 0$ kaikkialla paitsi z-akselin pisteissä. Tämä tarkoittaa, että kaikki xyz-koordinaatiston pisteet ovat muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ kantapisteitä lukuun ottamatta z-akselin pisteitä.

z-akselin pisteet eivät ole muuttujienvaihdon kantapisteitä, koska niillä ei ole yksikäsitteistä alkukuvaa sylinterikoordinaatistossa. Sylinterikoordinaatiston tason $\rho = 0$ pisteet kuvautuvat muuttujienvaihdossa z-akselin pisteiksi siten, että tason suora $z = z_0$ kuvautuu pisteeksi $(0, 0, z_0)$ kaikilla muuttujan φ arvoilla. Koska kuitenkin taso $\rho = 0$ on nollamitallinen avaruudessa $\mathbb{R}^3$, muuttujienvaihto $\mathbf{r}$ on säännöllinen.

Jacobin matriisin (42) sarakkeet ovat muuttujienvaihdon $\mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$ osittaisderivaatat eli koordinaattikäyrien tangenttivektorit. Nämä tangenttivektorit ovat:

$$\mathbf{r}_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),\ \mathbf{r}_\varphi = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0) \text{ ja } \mathbf{r}_z = (0, 0, 1) \tag{44}$$

Osittaisderivaattojen pituudet, jotka ovat myös muuttujienvaihdon $\mathbf{r}(\rho, \varphi, z)$ skaalaustekijät, ovat:

$$h_\rho = \|\mathbf{r}_\rho\| = 1, h_\varphi = \|\mathbf{r}_\varphi\| = \rho, h_z = \|\mathbf{r}_z\| = 1 \tag{45}$$

Pisteessä $(x, y, z) = \mathbf{r}(\rho, \varphi, z)$ muodostuva *sylinterikoordinaatiston lokaali kanta* koostuu yksikkötangenttivektoreista $(\hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_z)$, jotka saadaan jakamalla muuttujienvaihdon osittaisderivaatat pituuksillaan eli skaalaustekijöillä:

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{\mathbf{r}_\rho}{h_\rho} = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j} \tag{46}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\mathbf{r}_\varphi}{h_\varphi} = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j} \tag{47}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z = \frac{\mathbf{r}_z}{h_z} = \mathbf{k} \tag{48}$$

Suoralla laskulla voidaan todeta, että sylinterikoordinaatiston lokaali kanta on syklinen:

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho \times \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_z, \hat{\mathbf{e}}_\varphi \times \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_\rho \text{ ja } \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{49}$$

Syklisyydestä seuraa, että kanta $(\hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_z)$ on ortonormaali ja muodostaa oikeakätisen systeemin.

Sylinterikoordinaatiston lokaali kanta voidaan asettaa vain niihin karteesisen koordinaatiston pisteisiin, jotka ovat muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ kantapisteitä. Koska kuitenkin skaalaustekijät h_ρ ja h_z ovat nollasta eroavia myös z-akselin pisteissä, voidaan näihin pisteisiin liittää osakanta $(\hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_z)$.

Muuttujienvaihdon $(x, y, z) = \mathbf{r}(\rho, \varphi, z)$ differentioituvuuden geometrisena tulkintana differentiaalisen pieni siirtymä $(d\rho, d\varphi, dz)$ pisteessä (ρ, φ, z) kuvautuu siirtymäksi:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_\rho \, d\rho + \mathbf{r}_\varphi \, d\varphi + \mathbf{r}_z \, dz \tag{50}$$

$$= \|\mathbf{r}_\rho\| \hat{\mathbf{e}}_\rho \, d\rho + \|\mathbf{r}_\varphi\| \hat{\mathbf{e}}_\varphi \, d\varphi + \|\mathbf{r}_z\| \hat{\mathbf{e}}_z \, dz \tag{51}$$

$$= 1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_\rho \, d\rho + \rho \hat{\mathbf{e}}_\varphi \, d\varphi + 1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \, dz \tag{52}$$

$$= \hat{\mathbf{e}}_\rho \, d\rho + \rho \hat{\mathbf{e}}_\varphi \, d\varphi + \hat{\mathbf{e}}_z \, dz \tag{53}$$

pisteessä $(x, y, z) = \mathbf{r}(\rho, \varphi, z)$.

Lokaalin kannan ortogonaalisuudesta seuraa:

$$\|\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi\| = \|\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z\| = \|\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho\| = 1 \tag{54}$$

Tällöin myös tangenttivektorien ristitulojen pituudet ovat suoraan skaalaustekijöiden tuloja:

$$\|\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\varphi\| = h_\rho h_\varphi \|\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi\| = h_\rho h_\varphi \tag{55}$$

$$\|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_z\| = h_\varphi h_z \|\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z\| = h_\varphi h_z \tag{56}$$

$$\|\mathbf{r}_z \times \mathbf{r}_\rho\| = h_z h_\rho \|\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho\| = h_\rho h_z \tag{57}$$

Esimerkki: koska $\|\mathbf{N}(\varphi, z)\| = \|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_z\| = \|\mathbf{r}_\varphi\| \|\mathbf{r}_z\|$, pintaelementin $d\varphi dz$ skaalautuminen kuvauksessa $\mathbf{r}$ pintaelementiksi $\|\mathbf{N}(\varphi, z)\| d\varphi dz$ voidaan määrittää skaalaustekijöiden h_φ ja h_z tulona. Vastaavasti $\mathbf{N}(\varphi, z) = \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_z = \|\mathbf{r}_\varphi\| \|\mathbf{r}_z\| = h_\varphi h_z \hat{\mathbf{e}}_\rho$ lokaalin kannan syklisyyden nojalla.

Olkoon jatkuvasti derivoituva $f(\rho, \varphi, z)$. Gradientti ∇f sylinterikoordinaatiston lokaalissa kannassa on:

$$\nabla f(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z \tag{58}$$

Olkoon myös jatkuvasti derivoituva $\mathbf{f}(\rho, \varphi, z) = f_1\hat{\mathbf{e}}_\rho + f_2\hat{\mathbf{e}}_\varphi + f_3\hat{\mathbf{e}}_z$ Divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{f}$ sylinterikoordinaatiston lokaalissa kannassa on:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi}f_2 + \frac{\partial}{\partial z}(\rho f_3)\right) = \frac{f_1}{\rho} + \frac{\partial f_1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{59}$$

Roottori $\nabla \times \mathbf{f}$ sylinterikoordinaatiston lokaalissa kannassa on:

$$\nabla \times \mathbf{f}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\rho & \rho\hat{\mathbf{e}}_\varphi & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & \rho f_2 & f_3 \end{vmatrix} \tag{60}$$

2.3.6 Muuttujienvaihto pallokoordinaatteihin ja sen lokaali kanta

Karteesisen koordinaatiston pisteet voidaan esittää *pallokoordinaattien* (r, θ, φ) avulla seuraavasti:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, & r \geq 0 \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & \theta \in [0, \pi] \\ z = r\cos\theta, & \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases} \tag{61}$$

Yhtälöryhmä (61) esittää muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$, jossa $(x, y, z) = \mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$
$= (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$, karteesisista koordinaateista pallokoodinaatteihin.

Muuttuja r kuvaa karteesisen koordinaatiston pisteen etäisyyttä origosta, θ on suunnattu kulma vektorilta $\mathbf{k}$ pisteen paikkavektorille, ja φ on positiivisesti, eli xy-tasolla vastapäivään, suunnattu kulma luonnollisen kannan vektorilta $\mathbf{i}$ vektorille, joka on pisteen paikkavektorin projektio xy-tasolle. $r \sin\theta$ kuvaa pisteen etäisyyttä z-akselista.

Yhtälöryhmässä on valittu pallokoordinaattien arvot siten, että muuttujienvaihto on bijektiivinen kuvaus $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kaikissa muuttujienvaihdon säännöllisissä pisteissä, ja näitä arvoja rajaamalla voidaan valita ne avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukot, joita kulloinkin käsitellään.

Kantapisteen $\mathbf{r}(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ kautta kulkevat koordinaattikäyrät muodostavat kyseisessä pisteessä xyz-avaruuden pallokoordinaatiston ja luvut r_0, θ_0 ja φ_0 ovat pisteen pallokoordinaatit.

Muuttujienvaihdon $\mathbf{r} = r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ Jacobin matriisi on:

$$\mathrm{D}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial r} & \dfrac{\partial r_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial r_1}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial r} & \dfrac{\partial r_2}{\partial \theta} & \dfrac{\partial r_2}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial r_3}{\partial r} & \dfrac{\partial r_3}{\partial \theta} & \dfrac{\partial r_3}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{62}$$

Muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ Jacobin determinantti on:

$$\det(\mathrm{D}\mathbf{r}) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin\theta \tag{63}$$

Muuttujienvaihdossa pallokoordinaatiston pieni tilavuusalkio $dr d\theta d\varphi$ kuvautuu siis karteesiseen koordinaatistoon tilavuusalkioksi $r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$.

Jotta muuttujienvaihto $\mathbf{r}$ olisi säännöllinen, täytyy sen Jacobin determinantin olla nollasta eroava, pois lukien mahdolliselle lähtöjoukon nollamitalliselle osajoukolle.

Nyt $\det(\mathrm{D}\mathbf{r}) = r^2 \sin\theta \neq 0$ kaikkialla paitsi z-akselin pisteissä, joten näitä pisteitä lukuun ottamatta kaikki xyz-koordinaatiston pisteet ovat muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ kantapisteitä.

z-akselin pisteillä ei siis ole yksikäsitteistä alkukuvaa pallokoordinaatistossa, mutta niiden alkukuvien joukko on nollamitallinen avaruudessa $\mathbb{R}^3$, joten muuttujienvaihto $\mathbf{r}$ on säännöllinen. Pallokoordinaatiston tasojen $r = 0$, $\theta = 0$ ja $\theta = \pi$ pisteet kuvautuvat muuttujienvaihdossa z-akselin pisteiksi siten, että tason suora $r = r_0$ kuvautuu pisteeksi $(0, 0, r_0)$ kaikilla muuttujan φ arvoilla. Koska tasojen $r = 0$, $\theta = 0$ ja $\theta = \pi$ yhdiste on nollamitallinen avaruudessa $\mathbb{R}^3$, muuttujienvaihto $\mathbf{r}$ on säännöllinen.

Muuttujienvaihdon $\mathbf{r}(r, \theta, \varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ Jacobin matriisin (62) sarakkeet ovat sen osittaisderivaatat eli koordinaattikäyrien tangenttivektorit. Ne ovat:

$$\mathbf{r}_r = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \tag{64}$$

$$\mathbf{r}_\theta = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta) \tag{65}$$

$$\mathbf{r}_\varphi = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0) \tag{66}$$

Osittaisderivaattojen pituudet eli muuttujienvaihdon $\mathbf{r}(\rho, \varphi, z)$ skaalaustekijät ovat:

$$h_r = \|\mathbf{r}_r\| = 1,\ h_\theta = \|\mathbf{r}_\theta\| = r, \text{ ja } h_\varphi = \|\mathbf{r}_\varphi\| = r\sin\theta \tag{67}$$

Pisteessä $(x, y, z) = \mathbf{r}(\rho, \varphi, z)$ muodostuva *pallokoordinaatiston lokaali kanta* koostuu yksikkötangenttivektoreista $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi)$, jotka saadaan jakamalla muuttujienvaihdon osittaisderivaatat pituuksillaan eli skaalaustekijöillä:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{r}_r}{h_r} = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k} \tag{68}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{r}_\theta}{h_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k} \tag{69}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\mathbf{r}_\varphi}{h_\varphi} = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j} \tag{70}$$

Suoralla laskulla voidaan todeta, että pallokoordinaatiston lokaali kanta on syklinen (ks. luku 2.1.3):

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_r \text{ ja } \hat{\mathbf{e}}_\varphi \times \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\theta \tag{71}$$

Syklisyydestä seuraa, että kanta $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi)$ on ortonormaali ja muodostaa oikeakätisen systeemin.

Pallokoordinaatiston lokaali kanta voidaan asettaa vain niihin karteesisen koordinaatiston pisteisiin, jotka ovat muuttujienvaihdon $\mathbf{r}$ kantapisteitä. Koska kuitenkin skaalaustekijä h_r on nollasta eroava myös z-akselin pisteissä, ja h_θ on nollasta eroava muissa z-akselin pisteissä kuin origossa, voidaan origoon liittää osakanta $\hat{\mathbf{e}}_r$ ja muihin z-akselin pisteisiin osakanta $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta)$.

Muuttujienvaihdon $(x, y, z) = \mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$ differentioituvuuden geometrisena tulkintana differentiaalisen pieni siirtymä $(dr, d\theta, d\varphi)$ pisteessä (r, θ, φ) kuvautuu siirtymäksi:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{r}_r\, dr + \mathbf{r}_\theta\, d\theta + \mathbf{r}_\varphi\, d\varphi && (72)\\ &= \|\mathbf{r}_r\|\hat{\mathbf{e}}_r\, dr + \|\mathbf{r}_\theta\|\hat{\mathbf{e}}_\theta\, d\theta + \|\mathbf{r}_\varphi\|\hat{\mathbf{e}}_\varphi\, d\varphi && (73)\\ &= 1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_r\, dr + r \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta\, d\theta + r\sin\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi\, d\varphi && (74)\\ &= \hat{\mathbf{e}}_r\, dr + r\hat{\mathbf{e}}_\theta\, d\theta + r\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi\, d\varphi && (75) \end{aligned}$$

pisteessä $(x, y, z) = \mathbf{r}(r, \theta, \varphi)$.

Lokaalin kannan ortogonaalisuudesta seuraa:

$$\|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta\| = \|\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi\| = \|\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r\| = 1 \tag{76}$$

Tällöin seuraa myös:

$$\|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta\| = h_r h_\theta \|\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta\| = h_r h_\theta \tag{77}$$

$$\|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi\| = h_\theta h_\varphi \|\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi\| = h_\theta h_\varphi \tag{78}$$

$$\|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_r\| = h_\varphi h_r \|\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r\| = h_r h_\varphi \tag{79}$$

Esimerkki: koska $\|\mathbf{N}(\theta,\varphi)\| = \|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi\| = \|\mathbf{r}_\theta\|\|\mathbf{r}_\varphi\|$, pintaelementin $d\theta d\varphi$ skaalautuminen kuvauksessa $\mathbf{r}$ pintaelementiksi $\|\mathbf{N}(\theta,\varphi)\|d\theta d\varphi$ voidaan määrittää skaalaustekijöiden h_θ ja h_φ tulona. Vastaavasti $\mathbf{N}(\theta,\varphi) = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\varphi = \|\mathbf{r}_\theta\|\|\mathbf{r}_\varphi\| = h_\theta h_\varphi \hat{\mathbf{e}}_r$ lokaalin kannan syklisyyden nojalla.

Olkoon jatkuvasti derivoituva $f(r,\theta,\varphi)$. Gradientti ∇f pallokoordinaatiston lokaalissa kannassa on:

$$\nabla f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{80}$$

Olkoon myös jatkuvasti derivoituva $\mathbf{f}(r,\theta,\varphi) = f_1\hat{\mathbf{e}}_r + f_2\hat{\mathbf{e}}_\theta + f_3\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ Divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{f}$ pallokoordinaatiston lokaalissa kannassa on:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\, f_1) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\, f_2) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r f_3)\right) \tag{81}$$

Roottori $\nabla \times \mathbf{f}$ pallokoordinaatiston lokaalissa kannassa on:

$$\nabla \times \mathbf{f}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & r\hat{\mathbf{e}}_\theta & r\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ f_1 & r f_2 & r\sin\theta f_3 \end{vmatrix} \tag{82}$$

2.3.7 Kommentteja

Edellä on todettu, että sylinteri- ja pallokoordinaatistojen lokaalit kannat ovat syklisiä, ja näin siis ortonormaaleja ja oikeakätisiä. Tämä yksinkertaistaa laskutehtävien ratkaisemista. Muuttujenvaihdossa lähtöjoukon suorakulmio kuvautuu edelleen suorakulmioksi, ja suorakulmainen särmiö kuvautuu suorakulmaiseksi särmiöksi. Siten sylinterikoordinaatiston ja pallokoordinaatiston sekä niiden lokaalien kantojen käyttämisestä käytännön laskutehtävissä voidaan esittää seuraavat kommentit.

Jacobin determinantti, jota tarvitaan tilavuusintegraalin laskemiseen, on kannan skaalaustekijöiden tulo. Kun parametrisoidaan säännöllinen pinta käyttäen muuttujienvaihtoa, joka määrää syklisen lokaalin kannan, on yksi kolmesta käytössä olevasta muuttujasta vakio, ja differentiaalisen pintaelementin ala on kahta muuta muuttujaa vastaavien skaalaustekijöiden tulo. Tätä tietoa voi käyttää pintaintegraalia laskiessa. Erityisesti vuointegraalia laskiessa tarvitaan tietoa, että pinnan yksikkö(ulko)normaali on se lokaalin kannan vektoreista, joka vastaa sitä muuttujaa, joka on vakio kyseisellä pinnalla. Esimerkiksi sylinterikappaleen sillä pinnalla, jolla ρ on vakio, pinnan normaalivektori $\rho \cdot 1\hat{\mathbf{e}}_\rho = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho$ siten, että ρ ja 1 ovat niiden tangenttivektorien, joiden ristitulo määrää pinnan normaalivektorin, pituudet. Pinnan normaalivektorin pituus on differentiaalisen pintaelementin ala, joka tässä esimerkissä on ρ.

Lokaali kanta on ymmärrettävä eri tavalla kuin luonnollinen kanta. Lokaalin kannan komponentit ovat riippuvaisia siitä, mihin koordinaatiston pisteeseen se on asetettu.

Havainnollistetaan tätä esimerkillä. Kun magneettivuon tiheyttä $\mathbf{B}$ (aihetta tullaan käsittelemään luvussa 4) kuvataan sylinterikoordinaatiston lokaalissa kannassa vektorina $B\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, jossa $B = \|\mathbf{B}\|$, syy tähän on, että kuvataan kenttää, jonka kenttäviivat muodostavat pyöreitä silmukoita. Vektori $B\hat{\mathbf{e}}_\varphi = B(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$ sivuaa kenttäviivaa jokaisessa sen pisteessä, eli on kenttäviivan tangentti. Tämän tangenttivektorin suunta riippuu koordinaatin φ arvosta tarkasteltavassa pisteessä, ja yleensäkin magneettivuon tiheys $\mathbf{B}$ kussakin pisteessä riippuu muun muassa koordinaatista φ.

Edelleen, vaikka kenttäteorian ongelmissa käytetään sylinteri- ja pallokoordinaatteja, ei näiden koordinaattien arvoja tarvitse aina ratkaista. Käytetään tässäkin esimerkkiä. Viivavarauksen, jonka esitetään olevan z-akselin suuntainen, aiheuttama sähkökentän voimakkuus (laskukaava tullaan johtamaan luvussa 3.4.1) on $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_\rho = E(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, jossa $E = \|\mathbf{E}\|$. Jos on tarkoitus laskea, mikä $\mathbf{E}$ on jossakin koordinaatiston pisteessä (x, y, z), yksikkövektorin $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ osalta riittää tietää, miten $\cos\varphi$ ja $\sin\varphi$ riippuvat koordinaateista x ja y (ks. liite 2). Edelleen, z-akselin suuntaisen viivavarauksen λ aiheuttaman sähkökentän suuruus $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}$, jossa ρ riippuu koordinaateista x ja y.

Jos sylinteri- tai pallokoordinaatiston origo on asetettu muualle kuin karteesisen koordinaatiston origoon, tämä pitää ottaa huomioon sylinteri- ja pallokoordinaatteja ja lokaalien kantojen vektoreita määritettäessä (ks. jälleen liite 2 ja esimerkin 3.5.1 huomautus viiva- ja pistevarauksien sijainnista).

Tästä eteenpäin differentiaalisen pieni siirtymä eli pituusalkio $d\mathbf{r}$ esitetään tässä työssä symbolilla $d\mathbf{l}$, ellei toisin mainita.

3 Staattiset sähkökentät

Tässä luvussa käsitellään sähkövarausten aiheuttamia, ajan suhteen muuttumattomia sähkökenttiä. Näitä kenttiä kutsutaan myös staattisiksi ja konservatiivisiksi sähkökentiksi. Luku perustuu ensisijaisesti lähteeseen Griffiths, 2013. s. 59-92.

3.1 Coulombin laki

Kokeellisesti tiedetään, että kolmiulotteisen avaruuden pisteessä $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sijaitseva pistemäinen sähkövaraus q aiheuttaa avaruuden pisteessä $\mathbf{r} = (x, y, z)$ sijaitsevaan pistemäiseen sähkövaraukseen q' voiman $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ Coulombin lain mukaisesti:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \tag{83}$$

Tässä ε_0 on sähkövakio, eli tyhjiön permittiivisyys. Vastaavasti pistevaraus q aiheuttaa pistevaraukseen q' yhtä suuren, mutta suunnaltaan vastakkaisen voiman:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}\|^3} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \tag{84}$$

Samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan, ja erimerkkiset varaukset vetävät toisiaan puoleensa. Kun pistevaraukset q ja q' ovat samanmerkkisiä, $qq' > 0$. Tällöin varaukseen q' kohdistuva voima $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ on samansuuntainen kuin vektori varauksen q sijainnista $\mathbf{r}_0$ varauksen q' sijaintiin $\mathbf{r}$, jolloin varaus q' pyrkii etääntymään varauksesta q. Vastaavasti varaus q pyrkii etääntymään varauksesta q'. Kun varaukset ovat erimerkkisiä, $qq' < 0$ ja varausten toisiinsa kohdistamat voimat ovat vastakkaissuuntaisia niiden välisiin vektoreihin nähden, ja varaukset vetävät toisiaan puoleensa.

3.2 Sähkökentän voimakkuus

Varausten aiheuttamaa sähköstaattista vuorovaikutusta kuvataan sähkökentän voimakkuutena $\mathbf{E}$. Avaruuden pisteessä $\mathbf{r}$ sähkökenttä on pisteeseen kohdistuvan sähköstaattisen kokonaisvoiman ja pisteessä sijaitsevan varauksen q' osamäärä:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q'} \tag{85}$$

Sähkökentän olemassaolo todennetaan mittaamalla sen vaikutus pieneen testivaraukseen q', jonka olemassaolo ei käytännössä vaikuta sähkökenttään, kohdistuvana voimana (Thidé, 2011, s. 3).

Yksittäisen, pisteessä $\mathbf{r}_0$ sijaitsevan pistevarauksen q pisteeseen $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ seuraa Coulombin laista (83):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \tag{86}$$

Yksittäisen pistevarauksen q aiheuttama sähkökenttä voidaan esittää kompaktimmin muodossa:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \tag{87}$$

jossa $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$, ja $\hat{\mathbf{e}}_r$ on pistevarauksen sijainnista $\mathbf{r}_0$ havaintopisteeseen $\mathbf{r}$ osoittavan vektorin suuntainen yksikkövektori. Koska $\hat{\mathbf{e}}_r = \dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}$, se on myös pallokoordinaatiston lokaalin kannan vektori, tarkoittaen tässä muuttujienvaihtoa karteesisista koordinaateista pallokoordinaatteihin siten, että pallokoordinaatiston origo asetetaan pisteeseen $\mathbf{r}_0$ (ks. 2.3.6).

Varauksen aiheuttaman sähkökentän kenttäviivat ovat avoimia, ne eivät siis muodosta silmukoita (ks. 2.2.14). Kenttäviivojen suunta on positiivisesta varauksesta äärettömyyteen,

tai äärettömyydestä negatiiviseen varaukseen. Pistevarauksenaiheuttaman sähkökentän kenttäviivat osoittavat radiaalisesti pistevarauksesta ulospäin, ja yhtälön (86) mukaisesti sähkökenttä heikkenee suhteessa tarkastelupisteen ja varauksen etäisyyden neliöön.

Superpositioperiaatteen nojalla (Griffiths, 2013, s. 78) usean pistevarauksen $q_1 ... q_n$, jotka sijaitsevat pisteissä $\mathbf{r}_1 ... \mathbf{r}_n$, pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama sähkökenttä on yksittäisten varausten aiheuttamien sähkökenttien summa:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} \tag{88}$$

Pistevarauksen, ja siten myös useiden pistevarauksien, aiheuttama sähkökenttä on pyörteetön:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{89}$$

Sähkövarauksien aiheuttamaa, pyörteetöntä kenttää kutsutaan myös staattiseksi tai konservatiiviseksi sähkökentäksi. Konservatiivisen kentän matemaattista luonnetta on käsitelty luvussa 2.2.14.

3.3 Sähköstaattinen potentiaali ja työ sähkökentässä

Staattisella sähkökentällä $\mathbf{E}$ on sähköstaattinen potentiaali V siten, että:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \tag{90}$$

Sähköstaattinen potentiaali eroaa kappaleessa 2.2.14 käsitellystä staattisen vektorikentän skalaaripotentiaalista vain etumerkiltään. Kaavan (90) mukaisesti, sähkökenttä on sähkö-

staattisen potentiaalin gradientin vastavektorin suuntainen. Sähkökentän suunta on siis korkeammasta potentiaalista matalampaan.

Kun sähkökenttä on pistevarauksen aiheuttama, ks. kaava (86), on sen sähköstaattinen potentiaali:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{91}$$

Toisaalta, sähköstaattinen potentiaali(ero) voidaan määrittää käyräintegraalina:

$$V = -\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \tag{92}$$

Kaavassa (92) negatiivinen etumerkki merkitsee, että integrointi tapahtuu sähkökentän suunnan vastaisesti. Tämä johtuu juuri siitä, että sähkökentän suunta on korkeammasta potentiaalista matalampaan. Luvussa 2.2.14 todettiin, että käyräintegraali pyörteettömässä vektorikentässä saadaan vektorikentän skalaaripotentiaalin arvojen erotuksena siten, että potentiaalista integrointikäyrän loppupisteessä vähennetään potentiaali käyrän alkupisteessä. Alku- ja loppupisteen välille valittu reitti ei vaikuta integraalin arvoon. Myös kaava (92) antaa sähköisen potentiaalieron eli jännitteen siten, että käyrän alkupiste on referenssipiste, jonka potentiaaliin verrataan potentiaalia käyrän loppupisteessä.

Valitsemalla referenssipisteeksi ääretön sähköstaattisen potentiaalifunktion arvoksi integraalin alarajalla saadaan 0 (integroimisvakiota ei ole tarpeen huomioida määrätyssä integraalissa). Esimerkiksi kaavan (91) mukainen potentiaali V pistevarauksen q aiheuttamalle sähkökentälle $\mathbf{E}$ voidaan siis määrittää sähkökentän käyräintegraalina seuraavasti:

$$V = -\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_\infty^r E\,ds = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{1}{s^2}\,ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{93}$$

jossa $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_r$, $d\mathbf{l}$ on pallokoordinaatiston lokaalin kannan pituusalkio, muuttuja s kuvaa käyrän C pisteiden etäisyyksiä varauksesta q ja r on havaintopisteen etäisyys varauksesta.

Huomautus: referenssipisteen asettaminen äärettömyyteen potentiaalifunktiota määritettäessä toimii teoreettisella tasolla silloin, kun sähkökentän aiheuttava varausjakauma on äärellinen. (Griffiths, 2013, s. 81).

Superpositioperiaatteen nojalla (Griffiths, 2013, s. 82) usean pistevarauksen $q_1 ... q_n$, jotka sijaitsevat pisteissä $\mathbf{r}_1 ... \mathbf{r}_n$, pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama sähköstaattinen potentiaali on:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \tag{94}$$

Tällöin $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, kun $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ on määritelty kuten yhtälössä (88).

Sähkökentässä $\mathbf{E}$ varaukseen Q pitkin käyrää C tehtävä työ W määritellään seuraavasti:

$$W = -Q \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{95}$$

Jos lisäksi tunnetaan sähkökentän $\mathbf{E}$ sähköstaattinen potentiaali V käyrän C alku- ja loppupisteissä siten, että $V(\mathbf{r}_0)$ on potentiaali käyrän alkupisteessä $\mathbf{r}_0$ ja $V(\mathbf{r})$ on potentiaali käyrän loppupisteessä $\mathbf{r}$, työ W voidaan esittää potentiaalierona:

$$W = Q(V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0)) \tag{96}$$

Tässä potentiaalierolla ei siis tarkoiteta sähköstaattisten potentiaalien eroa. Tehtävän työn suuntaan vaikuttaa, paitsi sähköstaattisen potentiaalieron $V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0)$ etumerkki, myös se, onko varaus Q positiivinen tai negatiivinen. Vastaavasti, jos asetetaan integrointikäyrän C alkupiste äärettömyyteen ja siten voidaan katsoa, että $V(\mathbf{r}_0) = 0$, on varauksella Q pisteessä $\mathbf{r}$ potentiaali $V(\mathbf{r})$ ja potentiaalienergia $E_{pot} = QV(\mathbf{r})$. Yhtälön (96) yhteydessä potentiaalierolla tarkoitetaan siis potentiaalienergian eroa, eikä näitä käsitteitä pidä sekoittaa keskenään.

Jos $W > 0$, työtä tehdään varaukseen Q sähkökentän $\mathbf{E}$ vastaisesti, jolloin siirretään positiivista varausta korkeampaan sähköstaattiseen potentiaaliin tai negatiivista varausta matalampaan sähköstaattiseen potentiaaliin. Kummassakin tapauksessa sähkövarauksen potentiaalienergia kasvaa.

Jos puolestaan $W < 0$, sähkökenttä tekee työtä varaukseen, jolloin siirretään positiivista varausta matalampaan sähköstaattiseen potentiaaliin tai negatiivista varausta korkeampaan sähköstaattiseen potentiaaliin. Kummassakin tapauksessa sähkövarauksen potentiaalienergia vähenee. Sähkökentässä tehtävää työtä havainnollistetaan myös laskuesimerkissä 3.5.2.

3.4 Jatkuvat varausjakaumat ja niiden aiheuttamat sähkökentät

Jos pistevarauksia on riittävän tiheään ja tasaisesti jakautuneena jossakin alueessa, voidaan sähkövaraukset tässä alueessa esittää diskreettien pistevarausten kokoelman sijasta jatkuvana varausjakaumana. Tällöin yhtälön (88) mukainen tapa esittää varauksien aiheuttama sähkökenttä yksittäisten varausten aiheuttamien sähkökenttien summana korvautuu integraalilla.

Olkoon pisteeseen $\mathbf{r}$ sähkökentän $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aiheuttava kokonaisvaraus Q siten, että tämä kokonaisvaraus voidaan nähdä jatkuvana varausjakaumana. Tällöin varauksen Q voidaan ajatella koostuvan differentiaalisista varausalkioista dQ. Varausalkio dQ pisteessä $\mathbf{s}$ aiheuttaa pisteeseen $\mathbf{r}$ sähkökentän differentiaalisen elementin $d\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (Thidé, 2011, s. 4):

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \tag{97}$$

Jatkuva varausjakauma voi olla levittäytynyt käyrälle, jolloin se voidaan esittää käyttäen lineaarista varaustiheyttä eli viivavaraustiheyttä λ joka on sähkövarauksen Q määrä pituusyksikköä kohti (Griffiths, 2013, s. 63):

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \tag{98}$$

Vastaavasti pinnalle levittäytynyt varausjakauma voidaan esittää käyttäen pintavaraustiheyttä σ, joka on sähkövarauksen määrä pinta-alayksikköä kohti:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \tag{99}$$

Edelleen tilavuusvaraustiheys (lyhyemmin varaustiheys) ρ on sähkövarauksen määrä tilavuusyksikköä kohti:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \tag{100}$$

Riippuen siitä, onko varausjakauma tasainen vai paikasta riippuva, varaustiheydet λ, σ ja ρ voivat olla joko vakioita tai paikasta riippuvia funktioita. Kokonaisvaraus Q varausjakauman sisältävässä alueessa saadaan integroimalla varaustiheyttä alueen yli.

Jatkuvan varausjakauman pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}(\mathbf{r})$saadaan integroimalla yhtälön (97) oikeaa puolta tekemällä yhtälön (98), (99) tai (100) mukainen sijoitus ja integroimalla varausjakauman sisältävän alueen yli (Griffiths, 2013, s. 63).

Esimerkiksi tilavuuteen V levittäytyneen varausjakauman $Q = \rho(\mathbf{s})\, dV$, jossa $\rho(\mathbf{s})$ on mahdollisesti tilavuuden pisteestä $\mathbf{s}$ riippuva varaustiheys, pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ on:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\mathbf{s}) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}\, dV \tag{101}$$

Tilavuusvarausjakauman aiheuttaman sähkökentän $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sähköstaattinen potentiaali $V(\mathbf{r})$ pisteessä $\mathbf{r}$ on:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{s})}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|}\, dV \tag{102}$$

Sähköstaattisen potentiaalin määritelmän (90) siis $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$. Huomautus: gradientti määritetään muuttujan $\mathbf{r}$ suhteen, ja integraali muuttujan $\mathbf{s}$ suhteen.

Yhtälön (102) mukainen integraali suppenee, kun varaustiheys $\rho(\mathbf{s})$ alueessa V on paitsi jatkuva, myös rajoitettu, ja kun alue V on äärellinen ja sen ulkopuolella varaustiheys häviää, eli $\rho = 0$ (Adams & Essex, 2018, s. 950).

Sähköstaattisen potentiaalin olemassaolosta seuraa, että myös jatkuvan varausjakauman aiheuttama kenttä $\mathbf{E}$ on pyörteetön, siis $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, ja näin ollen kenttä on staattinen.

Luvussa 3.4.1 on esitetty todistus äärettömän pitkän tasaisen viivavarausjakauman aiheuttamalle sähkökentälle. Liitteessä 3 on esitetty todistus äärettömän tasaisen tasovarausjakauman aiheuttamalle sähkökentälle.

3.4.1 Tasaisen äärettömän viivavarausjakauman aiheuttama sähkökentän voimakkuus

Sähkökentän voimakkuus äärettömän pitkässä ja ohuessa, tasaisesti varautuneessa (viivavaraustiheys λ on vakio) johtimessa. Todistus esitetään ilman Gaussin lakia, jota käsitellään luvussa 3.5.

Viivavaraustiheys λ sijaitsee z-akselilla. Määritetään yksittäisen pisteessä $(0, 0, z_0)$ sijaitsevan varausalkion $dQ = \lambda\, dl = \lambda\, dz$ pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama sähkökentän differentiaalinen elementti $d\mathbf{E}(\mathbf{r})$, kun piste $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z$ siten, että $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ ja $\hat{\mathbf{e}}_z$ ovat sellaisen sylinterikoordinaatiston, jonka origo on varausalkion dQ sijainnissa, lokaalin kannan vektoreita (tällöin $z - z_0 \to z$):

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z}{\|\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z\|^3} = \frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \tag{103}$$

Nyt viivavarauksen pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ saadaan selville integroimalla ylläolevaa yhtälöä koko z-akselin yli:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \tag{104}$$

Koska matemaattisesti funktio $\dfrac{z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$ on muuttujan z suhteen pariton, ja fysikaalisesti z-akselin positiivisen ja negatiivisen puolen pisteissä sijaitsevien varausalkioiden aiheuttamien kenttien z-akselin suuntaiset komponentit kumoavat toisensa, integraali yksinkertaistuu:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\rho\,dz}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{\lambda\rho}{4\pi\varepsilon_0}\hat{\mathbf{e}}_\rho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \tag{105}$$

Tehdään sijoitus $z = \rho\tan t$, jolloin $dz = \dfrac{\rho\,dt}{\cos^2 t}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho \tag{106}$$

Viivavarausjakauman λ pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ on:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho \tag{107}$$

jossa ρ on pisteen $\mathbf{r}$ etäisyys viivavarauksesta.

3.5 Maxwellin I yhtälö: Gaussin laki sähkökentille

Sähkökentän $\mathbf{E}$ vuo $\Phi_{\mathbf{E}}$ läpi pinnan S, jonka yksikkönormaali on $\mathbf{n}$, on yhtälön (9) mukaisesti:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{108}$$

Jos pinta S on umpinainen, vuo $\Phi_{\mathbf{E}}$ voidaan Gaussin divergenssilauseen mukaisesti esittää myös kentän $\mathbf{E}$ divergenssin $\nabla \cdot \mathbf{E}$ integraalina pinnan S rajaaman tilavuuden V yli:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV \tag{109}$$

Pistevarauksen q aiheuttamaa sähkökenttää $\mathbf{E}$ kuvaavan kaavan (87) sekä liitteen 4 nojalla seuraa, että kyseisen sähkökentän divergenssillä $\nabla \cdot \mathbf{E}$ on integrointimassa vain siinä pisteessä, jossa varaus q sijaitsee, ja integrointimassan suuruus on $\frac{q}{\varepsilon_0}$.

Koska toisaalta luvun 2.2.12 mukaisesti sähkökentän $\mathbf{E}$ lähde sijaitsee pisteessä, jossa $\nabla \cdot \mathbf{E} > 0$, seuraa, että kentän $\mathbf{E}$ lähde on varauksen q sijainnissa. (Jos pistevaraus q on negatiivinen, on sen sijainnissa kentän $\mathbf{E}$ nielu.) Tämä sopii yhteen sen kanssa, että positiivisen varauksen q aiheuttaman sähkökentän $\mathbf{E}$ kenttäviivat alkavat varauksen sijainnista.

Jos nyt määritetään yksittäisen pistevarauksen q aiheuttaman sähkökentän $\mathbf{E}$ vuo $\Phi_{\mathbf{E}}$ sellaisen umpinaisen pinnan läpi, jonka rajaamassa tilavuudessa q sijaitsee, on

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{110}$$

Superpositioperiaatteen nojalla usean pistevarauksen aiheuttaman sähkökentän (yhtälö (88)) vuo umpinaisen pinnan S läpi saadaan pinnan rajaaman tilavuuden V sisältämien varausten aiheuttamien sähkökenttien summan vuona.

Merkitään nyt, että mielivaltaisen umpinaisen suunnatun pinnan S sisäänsä sulkema kokonaisvaraus on Q_{enc} riippumatta siitä, tulkitaanko varaus pistevarauksiksi vai jatkuvaksi varausjakaumaksi.

Seuraa, että kokonaisvarauksen aiheuttaman sähkökentän $\mathbf{E}$ vuo $\Phi_{\mathbf{E}}$ pinnan läpi on verrannollinen pinnan sisäänsä sulkemaan varaukseen:

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{enc} \tag{111}$$

Tämä on **Maxwellin I yhtälö** eli Gaussin laki sähkökentille integraalimuodossaan.

Edelleen, jos tilavuuden V sisältämät varaukset voidaan esittää jatkuvana tilavuusvarausjakaumana siten, että $q \rightarrow \rho\, dV$, jossa ρ on tilavuusvaraustiheys (100), on tilavuuden sisäänsä sulkema varaus $Q_{enc} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, dV$. Tästä ja Maxwellin I yhtälöstä integraalimuodossa seuraa:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, dV \tag{112}$$

Divergenssilauseen (20) nojalla yhtälö (112) saadaan muotoon:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \iiint_V \rho\, dV \tag{113}$$

Koska suunnattu pinta S, ja näin myös sen rajaama tilavuus V, on mielivaltainen, seuraa:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{114}$$

Tämä on Maxwellin I yhtälö differentiaalimuodossaan. Sen mukaan jatkuvan varausjakauman aiheuttamalla sähkökentällä $\mathbf{E}$ on lähde (tai nielu) niissä ja vain niissä pisteissä, joissa varauksia sijaitsee, eli joissa varaustiheys $\rho \neq 0$.

3.5.1 Laskuesimerkki: Sähkökenttien summa

Tasainen viivavarausjakauma $\lambda = 3.30\,\mathrm{nC/m}$ sijaitsee suoralla $x = 3\,\mathrm{m}$, $y = 4\,\mathrm{m}$. Pistevaraus Q sijaitsee 2 m etäisyydellä origosta. Määritä Q ja sen sijainti (x, y, z) niin, että sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E}$ origossa on $\mathbf{0}$ (Edminister, 1993, s. 31, 2.46).

Ratkaisun vaiheissa pyritään pitämään vektorit muodossa, jossa näkyy vektorin pituuden (joka kuvaa fysikaalisen suureen suuruutta) ja vektorin suuntaisen yksikkövektorin tulo, tavoitteena yksinkertaistaa yhtälönratkaisua.

Lasketaan ensin viivavarausjakauman λ aiheuttama sähkökentän voimakkuus origossa. Viivavaraus λ on siis z-akselin suuntainen, ja sen x-koordinaatti on 3 ja y-koordinaatti on 4. Viivavarauksen aiheuttama sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E}_\lambda$ esitetään sylinterikoordinaatein siten, että sylinterikoordinaatiston origo voidaan asettaa mihin tahansa xyz-koordinaatiston pisteistä $(3, 4, z)$, joissa varaus sijaitsee. Origon z-koordinaatti on mielivaltainen, koska viivavaraus on äärettömän pitkä, eikä z-koordinaattia tarvitse määritellä esimerkin ratkaisemiseksi.

Nyt viivavarauksen etäisyys z-akselista ja siis origosta on $\rho = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$.
Valitun sylinterikoordinaatiston lokaalin kannan vektori on:

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{(x-3)\mathbf{i} + (y-4)\mathbf{j}}{\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}} \tag{115}$$

Lisäksi nyt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Niinpä viivavarauksen origoon aiheuttaman sähkökentän voimakkuudelle $\mathbf{E}_\lambda$ saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\lambda &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2}} \cdot \frac{(0-3)\mathbf{i} + (0-4)\mathbf{j}}{\sqrt{(0-3)^2 + (0-4)^2}} \\ &= \frac{\lambda}{10\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} = \frac{3.3 \cdot 10^{-8}}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} \end{aligned} \tag{116}$$

Tästä lähtien (x, y, z) tarkoittaa pistevarauksen Q sijaintia, joka pyritään ratkaisemaan.

Pistevarauksen Q origoon aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}_Q$ on:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_Q &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0((0-x)^2+(0-y)^2+(0-z)^2)} \cdot \frac{(0-x)\mathbf{i}+(0-y)\mathbf{j}+(0-z)\mathbf{k}}{\sqrt{(0-x)^2+(0-y)^2+(0-z)^2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)} \cdot \frac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{aligned} \tag{117}$$

Tämä lasku perustuu vastaavaan päättelyyn kuin yllä on käytetty viivavarauksen aiheuttamalle sähkökentän voimakkuudelle. Pistevarauksen Q aiheuttama sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E}_Q$ esitetään pallokoordinaatein siten, että pallokoordinaatiston origoksi valitaan pistevarauksen sijainti (x, y, z). Liitteen 2 mukaisesti määritellään pistevarauksen ja xyz-koordinaatiston origon etäisyys $\mathbf{r}$ sekä pallokoordinaatiston lokaalin kannan vektori $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$.

Koska toisaalta tiedetään, että pistevarauksen etäisyys origosta $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2$, sähkökentän voimakkuus on

$$\mathbf{E}_Q = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-z\mathbf{k}}{2} \tag{118}$$

Sähkökenttien summa origossa on nolla:

$$\mathbf{E}_\lambda + \mathbf{E}_Q = \mathbf{0} \iff \mathbf{E}_\lambda = -\mathbf{E}_Q \tag{119}$$

josta seuraa:

$$\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{2} = \frac{3.3\cdot 10^{-8}}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-3\mathbf{i}-4\mathbf{j}}{5} \tag{120}$$

Yhtälö (120) on tosi vain, jos sen vasemman ja oikean puolen komponenttifunktiot ovat keskenään yhtä suuret. Selvästi $z = 0$, joten tiedetään, että pistevaraus sijaitsee pisteessä $(x, y, 0)$.

Oletetaan ensin, että $Q > 0$. Nyt, koska vektoriyhtälön kummankin puolen vektorien pituuksien täytyy olla samoja, seuraa:

$$Q = 16 \cdot 3.3 \cdot 10^{-8} = 5.28 \cdot 10^{-9} \text{ (C)} \tag{121}$$

Samoin kummankin puolen vektorien komponenttifunktioiden tulee olla samoja. Verrataan keskenään yksikkövektorien komponenttifunktioita, jolloin saadaan selville pisteessä $(x, y, 0)$ olevan yksikkövarauksen sijainti:

$$x = \frac{2 \cdot (-3)}{1 \cdot 5} = -\frac{6}{5}, \text{ ja } y = \frac{2 \cdot (-4)}{1 \cdot 5} = -\frac{8}{5} \tag{122}$$

Ratkaisu (kun $Q > 0$): Pistevaraus $Q = 5.28\,\mathrm{nC}$ sijaitsee pisteessä $(-1.2, -1.6, 0)\,(\mathrm{m})$.

Oletetaan nyt, että $Q < 0$, jolloin $-Q > 0$. Kun esitetään yhtälön (120) puolet edelleen vektorien pituuksien (jotka ovat aina ei-negatiivisia) ja vektorien suuntaisten yksikkövektorien tulona, ja huomataan, että pistevarauksen etumerkin muuttuminen kääntää sen aiheuttaman sähkökentän suunnan, yhtälö saa muodon:

$$\frac{-Q}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{2} = \frac{3.3 \cdot 10^{-8}}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} \tag{123}$$

Verrataan yhtälön (123) kummankin puolen vektorien pituuksia sekä yksikkövektorien komponenttifunktioita kuten yllä, jolloin ensin pituuksia vertaamalla ratkaistaan varaus Q:

$$Q = -16 \cdot 3.3 \cdot 10^{-8} = -5.28 \cdot 10^{-9}\,(\mathrm{C}) \tag{124}$$

Ja komponenttifunktioita vertaamalla ratkaistaan varauksen sijainti:

$$x = \frac{2 \cdot (-3)}{(-1) \cdot 5} = \frac{6}{5}, \text{ ja } y = \frac{2 \cdot (-4)}{(-1) \cdot 5} = \frac{8}{5} \tag{125}$$

Ratkaisu (kun $Q < 0$): Pistevaraus $Q = -5.28\,\mathrm{nC}$ sijaitsee pisteessä $(1.2, 1.6, 0)\,(\mathrm{m})$

Ratkaisuja on siis kaksi. Seuraavassa on pohdintaa siitä, ovatko löydetyt ratkaisut järkeviä:

Positiivisen viivavarauksen aiheuttaman sähkökentän suunta on varauksesta poispäin, ja sen koordinaatit ovat xy-tason ensimmäisellä neljänneksellä. On siis johdonmukaista, että sähkökenttien summan origossa on mahdollista olla nolla, kun on joko positiivinen pistevaraus xy-tason kolmannella neljänneksellä, siis origosta nähden eri suunnassa kuin viivavaraus, tai vaihtoehtoisesti negatiivinen pistevaraus (kenttäviivat varausta kohti) origosta nähden samassa suunnassa kuin positiivinen viivavaraus.

Huomautus ratkaisuprosessista: Koska viivavaraus on z-akselin suuntainen ja koska voidaan todeta, miksi pistevarauksen täytyy sijaita xy-tasolla, tehtävän ratkaisua voi tukea piirtämällä kuvan tilanteesta xy-tasoon projisoituna siten, että myös sijainnissa $(3, 4, z)$ oleva viivavaraus esitetään pisteenä, joka piirroksessa sijaitsee tason pisteessä $(3, 4)$.

3.5.2 Laskuesimerkki: Konservatiivisessa sähkökentässä tehtävä työ

Määritä työ W, joka tehdään siirrettäessä pistevaraus $Q = 3\,\mu\mathrm{C}$ sylinterikoordinaatiston pisteestä $(4\,\mathrm{m}, \pi, 0)$ pisteeseen $(2\,\mathrm{m}, \pi/2, 2\,\mathrm{m})$ sähkökentässä $\mathbf{E} = \frac{10^5}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + 10^5 z\hat{\mathbf{e}}^z$ $(\mathrm{V/m})$ (Edminister, 1993, s. 73, 5.22).

Sähkökentällä $\mathbf{E}$ on potentiaali, jos ja vain jos sen roottori on $\mathbf{0}$. Nyt

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\rho & \rho\hat{\mathbf{e}}_\varphi & \hat{\mathbf{e}}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{10^5}{\rho} & \rho \cdot 0 & 10^5 z \end{vmatrix} = \mathbf{0} \tag{126}$$

joten on olemassa potentiaali V, jolla $\mathbf{E} = -\nabla V$. Hiukkasen siirrossa tehtävä työ W riippuu vain siksi alku- ja loppupisteiden koordinaateista, ei valitusta reitistä. Tehtävä työ W saadaan käyräintegraalina:

$$W = -\int_C Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{127}$$

jossa $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{e}}_\rho d\rho + \rho\hat{\mathbf{e}}_\varphi d\varphi + \hat{\mathbf{e}}_z dz$ on sylinterikoordinaatiston differentiaalinen pituusalkio.

Ideana on, että koska johtuen sähkökentän konservatiivisuudesta, eli potentiaalin olemassaolosta, valittu reitti ei vaikuta laskettavan käyräintegraalin arvoon, voidaan integroida kunkin sylinterikoordinaatiston muuttujan suhteen erikseen, toisin sanoen pitkin sylinterikoordinaatiston koordinaattikäyriä.

Laskemalla pistetulo (huomaa, että yksikkövektorien pistetulot itsensä kanssa saavat arvon 1) $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ saadaan:

$$\begin{aligned} W &= -3 \cdot 10^{-6} \left(\int_4^2 \frac{10^5}{\rho} d\rho + \int_0^2 10^5 z dz \right) \\ &= -\frac{3}{10} \left(\Big|_{\rho=4}^{2} \ln\rho + \Big|_{z=0}^{2} \frac{1}{2} z^2 \right) \\ &= -\frac{3}{10} \left(-\ln 2 + 2 \right) \\ &= -0.392\,(\mathrm{J}) \end{aligned} \tag{128}$$

Tehtävä työ on siis negatiivinen, sähkökenttä siirtää positiivista varausta korkeammasta potentiaalista matalampaan.

Työ olisi voitu laskea myös potentiaalierona: Olkoon potentiaali $V = V(\rho, \varphi, z)$, jolle

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial}{\partial \rho} V \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} V \hat{\mathbf{e}}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} V \right) \tag{129}$$

Nyt $V = -10^5 \ln \rho + c(\varphi, z)$, jossa $c(\varphi, z)$ on integroimisvakio, joka voi riippua muuttujista φ ja z.

Koska $\dfrac{\partial}{\partial \varphi} V = 0$, myös $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\, c(\varphi, z) = 0$, joten $c(\varphi, z) = c(z)$.

Edelleen, $\dfrac{\partial}{\partial z} V = c'(z) = -10^5 z$, joten $c(z) = -\dfrac{10^5}{2} z^2 + c$.

Potentiaali V on vakiota c vaille yksikäsitteisesti määrätty, eikä kyseisen vakion arvoa tarvitse kiinnittää, koska tässä lasketaan potentiaalieroa. Nyt

$$V = V(\rho, \varphi, z) = -10^5 (\ln \rho + \frac{1}{2} z^2) + c \tag{130}$$

Voidaan vielä tarkistaa, että $-\nabla V = \mathbf{E}$.

Niinpä potentiaalifunktion arvo alkupisteessä on: $V_{alku} = V(4, \pi, 0) = -10^5 \ln 4 + c$

Potentiaalifunktion arvo loppupisteessä on: $V_{loppu} = V(2, \pi/2, 2) = -10^5 (\ln 2 + 2) + c$

Nyt siis $V_{alku} > V_{loppu}$. Kuten yllä on todettu, varaus siirtyy korkeammasta potentiaalista matalampaan. Tehtävä työ W on:

$$W = Q(V_{loppu} - V_{alku}) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot (-10^5)(-\ln 2 + 2) = -0.392\,(\mathrm{J}) \tag{131}$$

Ilmiötä havainnollistaa tilanne, jossa esine putoaa hyllyltä lattialle. Hyllyllä ollessaan esineellä on korkeampi potentiaalienergia kuin lattialla ollessaan. Tehtävä työ eli potentiaalienergian muutos on negatiivinen, painovoimakenttä tekee työtä. Vastaavasti nyt sähkökenttä tekee työtä positiivisen varauksen siirtämiseksi, ja työ on näin negatiivinen.

Toisaalta sähkövaraus voi olla myös negatiivinen, siinä missä äskeisen havainnollistuksen esineen massa olisi väistämättä positiivinen. Negatiivinen varaus pyrkii hakeutumaan matalasta potentiaalista korkeampaan; sen potentiaalienergia on siis sitä korkeampi, mitä matalammassa potentiaalissa se on, kuten on selitetty luvussa 3.3.

Jos nyt äskeisen esimerkin pistevaraus olisikin $Q = -3\ \mu\mathrm{C}$, ja sähkökenttä $\mathbf{E}$ ja koordinaatit samat kuin esimerkissä, olisi työ $W = 0.392\,(\mathrm{J})$. Työ olisi positiivinen, siis tehtäisiin työtä sähkökenttää vastaan, koska vaikka tässäkin siirrettäisiin varausta matalampaan potentiaaliin, varaus olisi negatiivinen. Varauksen potentiaalienergia kasvaisi, vaikka se siirtyisi pienempään sähköstaattiseen potentiaaliin.

Ylläoleva esimerkki pyrkii havainnollistamaan luvun 3.3 mainintaa sähköstaattisen potentiaalin ja potentiaalienergian erosta. Sähköiseen potentiaalienergiaan vaikuttaa potentiaalin lisäksi varaus, ja oleellisesti myös varauksen merkki, ei vain sen suuruus.

Huomautus laskutekniikasta: Sähkökentän $\mathbf{E}$ konservatiivisuus ei edellytä, että jokainen sen komponenttifunktio on riippuvainen vain yhdestä tai ei mistään muuttujasta. Joka tapauksessa konservatiivisen vektorikentän tekemää työtä laskiessa (integroimalla paloittain koordinaattikäyrien suuntaisesti) jokainen komponenttifunktio integroidaan yhden koordinaattikäyrän suuntaisesti. Tällöin vain toisten muuttujien paikalle sijoitetaan niitä vastaavat koordinaattikäyrän alku- tai loppupisteen koordinaatit riippuen siitä, onko kyseisen muuttujan suhteen jo integroitu.

3.5.3 Laskuesimerkki: Gaussin laki sähkökentille

Alueessa $a \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq b\ (a,b>0)$ on tasainen tilavuusvarausjakauma ρ_v ($\mathrm{C/m^3}$). Määritä Gaussin lain sähkökentille, eli Maxwellin I yhtälön, nojalla sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E}$ kaikkialla (Edminister, 1993, s. 42 3.15, laskettava suure vaihdettu).

Esitetään karteesisen koordinaatiston pisteet sylinterikoordinaatein:
$(x,y,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\ \sin\varphi, z)$, jolloin $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$.

Alue voidaan tulkita sisäkkäisten sylinteripintojen, joilla ρ on vakio ($a \leq \rho \leq b$), yhdisteenä. Yleisemmin koko avaruus $\mathbb{R}^3$ voidaan esittää sylinterikoordinaateissa ja sitten tulkita tällaisten pintojen yhdisteenä.

Sylinterikoordinaatein esitettävän pinnan, jolla ρ on vakio (merkitään tällöin $\rho = R$), ulospäin osoittava yksikkönormaalivektori on $\hat{\mathbf{e}}_\rho$. Sähkökentän voimakkuus tällaisen pinnan läpi on siis $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_\rho$. (Sähkökentällä on vain radiaalinen komponentti, koska alue on z-akselin suunnassa mielivaltaisen pitkä.)

Edelleen, luvun 2.3.5 mukaisesti alueen tilavuusalkio dV määritellään käyttäen Jacobin determinanttia muuttujienvaihdolle karteesista koordinaateista sylinterikoordinaatteihin. Jacobin determinantti on ρ, jolloin tilavuusalkio $dV = dxdydz = \rho\, d\rho d\varphi dz$. Lisäksi sylinteripinnan, jonka yksikkönormaali on $\hat{\mathbf{e}}_\rho$, pinta-alkio $dS = \rho\, d\varphi dz$, jossa ρ on skaalaustekijöiden $h_\varphi = \rho$ ja $h_z = 1$ tulo.

Pinnan rajaaman tilavuuden V kokonaisvaraus saadaan varaustiheyden ρ_v tilavuusintegraalina (ks. 3.4). Esitetään tämä kokonaisvaraus eri alueissa:

Alueessa $\rho \leq a$ varaustiheys pinnan rajaamassa tilavuudessa on 0. Tällöin myös pinnan $\rho = R$ sisäänsä sulkema varaus on 0, ja sähkökentän voimakkuus pinnan läpi on $\mathbf{0}$.

Lasketaan pinnan $\rho = R$ sisäänsä sulkema varaus $Q(R)$, kun $a < \rho < b$ ja pinnalla on z-akselin suunnassa mielivaltainen pituus L:

$$\begin{aligned} Q(R) &= \iiint_V \rho_v \, dV \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_a^R \rho_v \rho \, d\rho d\varphi dz \\ &= L \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \rho_v (R^2 - a^2) \\ &= \pi \rho_v L (R^2 - a^2) \end{aligned} \tag{132}$$

Pinnan $\rho = R$ sisäänsä sulkema kokonaisvaraus Q_{kok}, kun $\rho \geq b$, on:

$$Q_{kok} = \pi \rho_v L (b^2 - a^2) \tag{133}$$

Maxwellin I yhtälön eli Gaussin lain sähkökentille integraalimuodon (111) nojalla umpinaisen pinnan sisäänsä sulkema kokonaisvaraus on suoraan verrannollinen sen aiheuttaman sähkökentän vuohon (108) pinnan läpi. Esitetään siis pinnan S sisäänsä sulkema varaus Q verrannollisena sähkökentän vuohon pinnan läpi, kun $\rho > a$:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} E \hat{\mathbf{e}}_\rho \cdot \hat{\mathbf{e}}_\rho \, \rho \, d\varphi dz = 2\pi L E \rho = 2\pi \rho L E \tag{134}$$

Ratkaistaan nyt sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_\rho$ eri alueissa. Alueessa $\rho \leq a$ Gaussin lain nojalla $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Alueessa $a < \rho < b$ yhtälöistä (132) ja (134) seuraa, kun merkitään $R = \rho$:

$$E = \frac{\rho_v (\rho^2 - a^2)}{2\rho \, \varepsilon_0}, \text{ jolloin } \mathbf{E} = \frac{\rho_v (\rho^2 - a^2)}{2\rho \, \varepsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_\rho \, (\mathrm{V/m}) \tag{135}$$

Alueessa $\rho \geq b$ yhtälöistä (133) ja (134) seuraa:

$$E = \frac{\rho_v (b^2 - a^2)}{2\rho \, \varepsilon_0}, \text{ jolloin } \mathbf{E} = \frac{\rho_v (b^2 - a^2)}{2\rho \, \varepsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_\rho \, (\mathrm{V/m}) \tag{136}$$

4 Sähkövirta ja magneettikentät

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti ensin sähkövarausten liikettä eli sähkövirtaa, sekä varauksen säilymislakia. Sitten esitetään Lorentzin voima. Tämän jälkeen käsitellään magneettikenttiä siten, että niillä tarkoitetaan nimenomaan sähkövirran aiheuttamia, ajan suhteen muuttumattomia kenttiä.

4.1 Sähkövirta ja sähkövirrantiheys

Sähkövirta I, eli sähkövarausten liike, määritellään kiinnitetyn poikkipinnan läpi kulkevana sähkövarauksena aikayksikköä kohti (Hayt & Buck, 2012, s. 110):

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \tag{137}$$

Sähkövirta on skalaarisuure, joka noudattaa johtimen kulkusuuntaa. Virta voi kuitenkin olla positiivinen tai negatiivinen. Sopimuksen mukaisesti sähkövirran positiivinen suunta on positiivisten varausten kulkusuunnan suuntainen ja negatiivisten varausten kulkusuunnan vastainen. (Young & Freedman, 2020, 814).

Edelleen määritellään sähkövirrantiheys $\mathbf{J}$ sähkövirtana pinta-alayksikköä kohti niin, että virrantiheyden ja virran välinen riippuvuus on (Hayt & Buck, 2012, s. 110):

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{138}$$

jossa $\mathbf{n}$ on pinnan S yksikkönormaali. Kun $\mathbf{J}$ on vakio ja pinnan yksikkönormaalin suuntainen, ja pinta S on tasoalue, pätee $J = \dfrac{I}{A}$, jossa $J = \|\mathbf{J}\|$ ja A on tasoalueen ala.

Virrantiheys voidaan ilmaista varaustiheyden ρ ja varausten keskimääräisen nopeuden $\mathbf{v}$ tulona (Hayt & Buck, 2012, s. 111):

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} \tag{139}$$

4.2 Varauksen säilymislaki ja sähkövirran jatkuvuusyhtälö

Sähkövaraukseen pätee säilymislaki, joka ilmenee globaalisti ja lokaalisti. Näistä varauksen globaali säilymislaki on, että sähkövarauksen kokonaismäärä universumissa ei muutu (Griffiths, 2013, s. 356).

Varauksen lokaali säilymislaki puolestaan merkitsee sitä, että sähkövaraus ei yhtäkkiä ilmaannu jostain tai vastaavasti katoa, vaan se vaihtaa sijaintia jotakin jatkuvaa polkua pitkin (Griffiths, 2013, s. 356).

Olkoon tilavuus V, jonka reuna on umpinainen pinta S, ja tämän pinnan yksikköulkonormaali $\mathbf{n}$. Gaussin divergenssilauseen nojalla tilavuuteen menevä nettovirta I on:

$$I = -\iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J}\, dV \tag{140}$$

Lisäksi, kun tilavuutta V pidetään ajasta riippumattomana, sähkövirran määritelmän mukaan pätee:

$$I = \frac{d}{dt}\iiint_V \rho\, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV \tag{141}$$

Koska tilavuus V on mielivaltainen, seuraa:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{142}$$

Näin saadaan **sähkövirran jatkuvuusyhtälö** eli varauksen säilymislaki (Griffiths, 2013, s. 356):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{143}$$

Jos siis piste toimii virrantiheyden lähteenä, vähenee varaustiheys tässä pisteessä ajan funktiona. Jos piste toimii virrantiheyden nieluna, varaustiheys kasvaa ajan funktiona.

Jos varaustiheys ρ ei muutu ajan funktiona, niin $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Tällöin virta on stationaarinen (Purcell, E. & Morin, D., 2013, s. 431).

4.3 Lorentzin voima

Sähkö- ja magneettikenttien olemassaolo havaitaan niiden voimavaikutuksen välityksellä. Sähkökentän voimakkuuden $\mathbf{E}$ ja magneettivuon tiheyden $\mathbf{B}$ yksittäiseen, nopeudella $\mathbf{v}$ kulkevaan varaukseen q kohdistama voima $\mathbf{F}$ määritellään seuraavasti (Griffiths, 2013, s. 212.):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{144}$$

Tätä voimaa kutsutaan Lorentzin voimaksi. Yhtälöstä voidaan erottaa myös erityisesti magneettikentän aiheuttama Lorentzin voima $\mathbf{F}_{mag} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Koordinaatistossa, jossa varauksen q nopeus $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, varaukseen vaikuttaa vain sähkökenttä $\mathbf{E}$ kaavan 85 mukaisesti.

Lorentzin voiman F varaukseen q tekemän työn W differentiaalinen elementti dW voidaan esittää seuraavasti, kun varaus kulkee ajassa dt matkan $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}dt \tag{145}$$

Ristitulo on aina kohtisuorassa tekijöihinsä nähden, joten $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$, ja $\mathbf{F}_{mag} = 0$.

Magneettikenttä ei tee varaukseen työtä, se ei siis kiihdytä tai hidasta varauksen liikettä. Magneettikenttä vain kaareuttaa varauksen kulkusuuntaa siten, että magneettisen voiman suunta säilyttää kohtisuoruutensa varauksen kulkusuuntaan nähden. Vain sähkökenttä voi tehdä työtä varaukseen. (Griffiths, 2013, s. 215.)

4.4 Magneettinen voima

Määritetään magneettikentän virtajohtimeen aiheuttama voima perustuen lähteeseen Purcell & Morin, 2013, s. 284.

Esitetään magneettikentän $\mathbf{B}$ aiheuttaman Lorentzin voiman $\mathbf{F}$ differentiaalinen elementti $d\mathbf{F}$, joka kohdistuu nopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvan jatkuvan varausjakauman differentiaaliselle varausalkiolle dq:

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\, dq \tag{146}$$

Varauksen oletetaan liikkuvan ohuessa johtimessa, jonka differentiaalinen pituusalkio on $d\mathbf{l}$, ja $dl = \|d\mathbf{l}\|$. Tällöin $dq = \lambda\, dl$, kun λ on liikkuvien varausten viivavaraustiheys (98). Lisäksi $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{l}}{dt}$, ja koska $d\mathbf{l}$ ja $\mathbf{v}$ ovat samansuuntaisia, niin $\mathbf{v} = v\,\dfrac{d\mathbf{l}}{dl}$, jossa $v = \|\mathbf{v}\|$.

Johtimessa kulkee sähkövirta I, josta seuraa:

$$I = \frac{dq}{dt} = \lambda \frac{dl}{dt} = \lambda v \tag{147}$$

Nyt yhtälö (146) saadaan muotoon:

$$d\mathbf{F} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\, dq = (v\,\frac{d\mathbf{l}}{dl} \times \mathbf{B})\lambda\, dl = \lambda v\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{148}$$

Näin ollen ulkoisen magneettikentän $\mathbf{B}$ johtimeen C, jossa kulkee virta I, aiheuttama magneettinen voima $\mathbf{F}$ on:

$$\mathbf{F} = \int_C I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{149}$$

Ristitulon ominaisuuksien mukaisesti magneettinen voima $\mathbf{F}$ vaikuttaa kohtisuorassa virtaelementin $Id\mathbf{l}$ ja magneettivuon tiheyden $\mathbf{B}$ virittämän tasoon nähden.

4.5 Vakionopeudella liikkuvan pistevarauksen aiheuttama magneettikenttä ja oikean käden sääntö

Tämä luku perustuu pääasiassa lähteeseen Young & Freedman, 2020, s. 918-920.

On havaittu kokeellisesti, että sähkövarausten liike eli sähkövirta aiheuttaa magneettikentän (Jackson, 1999, s. 175).

Vakionopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvan pistevarauksen q sijainnistaan $\mathbf{s}$ pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama magneettikenttä (tarkemmin magneettivuon tiheys) $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ on:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \tag{150}$$

Tässä μ_0 on magneettivakio eli tyhjiön permeabiliteetti.

Kaava (150) voidaan ilmoittaa myös muodossa

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \tag{151}$$

jossa $\hat{\mathbf{e}}_r = \dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|}$ on varauksen sijainnista $\mathbf{s}$ kentän havaintopisteeseen $\mathbf{r}$ olevan suuntavektorin suuntainen yksikkövektori, ja $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|$ on pisteiden välinen etäisyys.

Magneettikentän (magneettivuon tiheyden) suuruus $B(\mathbf{r})$ on siis

$$B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q|v\sin\theta}{r^2} \tag{152}$$

jossa θ on vektorien $\mathbf{v}$ ja $\hat{\mathbf{e}}_r$ välinen (pienempi) kulma. Ristitulon ominaisuuksista seuraa, että $\|\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{e}}_r\| = v\sin\theta$.

Ristitulon pituus $\|\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{e}}_r\|$ on suurin, kun ristitulon tekijät $\mathbf{v}$ ja $\hat{\mathbf{e}}_r$ ovat keskenään kohtisuorassa, jolloin $\sin\theta = 1$. Niinpä magneettikenttä $\mathbf{B}$ on, kullakin etäisyyden r arvolla, voimakkaimmillaan niissä pisteissä, jotka ovat varauksen kanssa samalla sellaisella tasolla, joka on kohtisuorassa vektoriin $\mathbf{v}$ nähden. Toisaalta, $\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0}$ kaikissa vektorin $\mathbf{v}$ määräämän suoran pisteissä, ja siis $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ varauksen koko kulkureitillä.

Kun verrataan liikkuvan pistevarauksen aiheuttamaa magneettikenttää $\mathbf{B}$ pistevarauksen, joko paikallaan pysyvän tai liikkuvan, aiheuttamaan sähkökenttään $\mathbf{E}$ (yhtälö (86)), tai erityisesti kenttien suuruuksia B ja E, huomataan molempien olevan suoraan verrannollisia varaukseen q sekä kääntäen verrannollisia etäisyyden r neliöön kerrottuna luvulla 4π. Magneettikentän suunta kuitenkin poikkeaa täysin sähkökentän suunnasta.

Luvussa 3.2 todettiin, että kun sähkökentän aiheuttava varaus on positiivinen, kentän suunta on varauksesta ulospäin, ja varauksen ollessa negatiivinen kenttäviivat osoittavat sitä kohti.

Toisaalta magneettikenttä $\mathbf{B}$ on kaavan (151) mukaisesti ristitulovektorin $\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{e}}_r$ suuntainen, kun q on positiivinen, ja ristitulon vastavektorin suuntainen, kun q on negatiivinen. Ristitulo $\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{e}}_r$ on nopeuteen $\mathbf{v}$ ja vektoriin $\hat{\mathbf{e}}_r$ nähden kohtisuorassa. Siksi magneettikenttä $\mathbf{B}$ on vektorien $\mathbf{v}$ ja $\hat{\mathbf{e}}_r$ määräämän tason normaalin suuntainen.

Magneettikentän kenttäviivat kiertävät vektoria $\mathbf{v}$, ja vektori $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ on kenttäviivan tangenttivektori eli sivuaja pisteessä $\mathbf{r}$ (ks. 2.2.1). Kenttäviivat siis leikkaavat kunkin ristitulon

$\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_r$ määrittämän tason kohtisuorassa suunnassa. Kenttäviivat muodostavat silmukoita, jotka varauksen q ollessa positiivinen osoittavat ylhäältä päin katsottuna vastapäivään.

Magneettikentän suunta noudattaa siis niin kutsuttua oikean käden sääntöä. Jos kuvaannollisen käden ylöspäin osoittava peukalo edustaa positiivisen varauksen q kulkusuuntaa $\mathbf{v}$, käden muut neljä sormea, joihin nähden peukalo on kohtisuorassa, koukistettuina vastaavat magneettikentän $\mathbf{B}$ kenttäviivojen suuntaa.

Havainnollistetaan vielä magneettikentän suuntaa varauksen kulkusuuntaan nähden esimerkillä: Olkoon varaus q, joka liikkuu levossa olevassa xyz-koordinaatistossa vakionopeudella $\mathbf{v}$ pitkin z-akselin suuntaista suoraa. Tarkastellaan varauksen pisteeseen (x, y, z) aiheuttamaa magneettikenttää.

Suoritetaan tarkastelu koordinaatistossa, joka saadaan alkuperäisestä koordinaatistosta siirtämällä origo varauksen sijaintiin. Nyt tässä uudessa koordinaatistossa $\mathbf{v} = (0, 0, v) = v\hat{\mathbf{e}}_z$, ja kaavan (151) yhteydessä määritelty vektori $\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{r}(x, y, z)$, jossa havaintopisteen (x, y, z) ja varauksen välinen etäisyys $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tällöin $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{v}{r}(-y, x, 0) = \frac{v\rho}{r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, jossa $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ on sekä sylinteri- että pallokoordinaatiston lokaaleihin kantoihin kuuluva vektori ja $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ on pisteen etäisyys z-akselista.

Vektorin $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_r$ suunnan voi, ristitulon lineaarisuuden nojalla, todeta myös esittämällä vektori $\hat{\mathbf{e}}_r$, joka on pallokoordinaatiston lokaalin kannan vektori, kahden keskenään kohtisuoran komponenttinsa summana:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{r}(x, y, 0) + \frac{1}{r}(0, 0, z) = \frac{\rho}{r}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{z}{r}\hat{\mathbf{e}}_z \tag{153}$$

jossa $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ ja $\hat{\mathbf{e}}_z$ ovat sylinterikoordinaatiston lokaalin kannan vektoreita. Nyt huomioiden tämän kannan syklisyys (ks. 2.1.3) $\mathbf{v} \times \frac{\rho}{r}\hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{v\rho}{r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, ja $\mathbf{v} \times \frac{z}{r}\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}$.

Edelleen, koska siis sylinterikoordinaatiston lokaalissa kannassa $(-y, x, 0) = \rho\hat{\mathbf{e}}_\varphi$, ja koska $\rho = r \sin\theta$, jossa siis r on pisteen etäisyys origosta (varauksen sijainnista) ja θ on vek-

torien $\hat{\mathbf{e}}_z$ ja $\hat{\mathbf{e}}_r$ välinen kulma (erityisesti $\rho = r$ kaikissa tason $z = 0$ pisteissä), voidaan merkitä $\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_r = v \sin\theta \, \hat{\mathbf{e}}_\varphi$.

Kun siis on valittu liikkuvan pistevarauksen q nopeusvektoriksi $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{e}}_z$, varauksen aiheuttama magneettikenttä on:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q v \sin\theta}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \text{ kun } q > 0 \tag{154}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 (-q) v \sin\theta}{4\pi r^2}(-\hat{\mathbf{e}}_\varphi), \text{ kun } q < 0 \tag{155}$$

Negatiiviselle varaukselle magneettikenttä on ristitulon vastavektorin suuntainen. Jos siis negatiivisen varauksen katsotaan kulkevan ylöspäin, kaavan (155) mukaisesti magneettikentän kenttäviivat kiertävät nopeusvektoria myötäpäivään.

4.6 Vakiovirran aiheuttama magneettikenttä: Biot'n ja Savartin laki

Tässä luvussa käsitellään liikkuvien sähkövarausten aiheuttamaa magneettikenttää siitä näkökulmasta, että varausten liike esitetään sähkövirtana. Luku perustuu pääasiassa lähteisiin Adams & Essex, 2018, s. 947-948 ja Jackson, 1999, s. 175-176. Vakiovirran ja sen aiheuttaman magneettikentän yhteyttä voidaan kuvata Biot'n ja Savartin lailla:

Olkoon $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ ajasta riippumaton magneettivuon tiheys pisteessä $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, ja I ohuessa johtimessa kulkeva vakiosähkövirta. Johtimen differentiaalinen pituusalkio on $d\mathbf{s}$, ja johtimen pisteitä merkitään muuttujalla $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$. Virran I pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttaman magneettivuon tiheyden $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ differentiaalinen elementti $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$ on (Adams & Essex, 2018, s. 947):

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \tag{156}$$

Yhtälöä (156) kutsutaan Biot'n ja Savartin laiksi.

Jos merkitään, että pisteiden $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{s}$ välinen etäisyys on $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|$, ja pisteestä $\mathbf{s}$ pisteeseen $\mathbf{r}$ osoittavan vektorin suuntainen yksikkövektori on $\hat{\mathbf{e}}_r$, yhtälö (156) saa muodon:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} \tag{157}$$

Ristitulon ominaisuuksien mukaisesti magneettikenttä pisteessä $\mathbf{r}$ on kohtisuorassa virtaelementin $Id\mathbf{s}$ ja pisteiden $\mathbf{r}$ ja $\mathbf{s}$ väliseen suuntavektorin määräämään tasoon nähden. Toisaalta samansuuntaisten vektorien ristitulo on $\mathbf{0}$, eikä magneettikentällä ole johtimen pituusalkion suuntaista komponenttia.

Virran I aiheuttaman magneettikentän suunta noudattaa edelleen luvussa 4.5 mainittua oikean käden sääntöä. Magneettikenttä on kohtisuorassa ristitulon $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$ määräämään tason nähden, ja kenttäviivat muodostavat vektoria $Id\mathbf{s}$ kiertäviä silmukoita siten, että siitä suunnasta katsottuna, johon virta kulkee, silmukat kiertävät vastapäivään.

Magneettikenttien superpositioperiaatteen nojalla usean liikkuvan varauksen aiheuttama magneettikenttä on yksittäisten liikkuvien varauksien aiheuttamien magneettikenttien summa (Young & Freedman, 2020, s. 941). Näin ollen virran I pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama kokonaismagneettikenttä $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ pisteessä on pienten virtaelementtien aiheuttamien magneettikenttien summa.

Niinpä $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ saadaan integroimalla yhtälöä (156) johtimen C, jossa virta kulkee, yli:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \tag{158}$$

Integroinnin tulos riippuu johtimen muodosta, mutta luonnollisesti virran voidaan ajatella kulkevan vain johtimessa, joka on joko äärettömän pitkä, jolloin integroimisrajat integraalissa (158) ovat $-\infty$ ja $+\infty$, tai muodostaa suljetun piirin, jolloin integraali määritetään suljettuna käyräintegraalina.

Virran I aiheuttaman magneettikentän suunta noudattaa edelleen luvussa 4.5 mainittua oikean käden sääntöä. Se on kohtisuorassa ristitulon $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r}$ määräämään tason nähden ja muodostaa vektoria $Id\mathbf{s}$ virran kulkusuuntaan nähden vastapäivään kiertäviä silmukoita.

Johdetaan Biot'n ja Savartin lakia (156) käyttäen äärettömän pitkässä, suorassa ohuessa johtimessa C kulkevan virran I aiheuttama magneettikenttä.

Katsotaan johtimen sijaitsevan koordinaatiston z-akselilla. Tällöin johtimen pituusalkio $d\mathbf{s} = dz\hat{\mathbf{e}}_z$, ja johtimen pisteestä $\mathbf{s} = (0, 0, z_0)$ havaintopisteeseen $\mathbf{r} = (x, y, z)$ osoittava vektori $\mathbf{r} - \mathbf{s} = (x, y, z - z_0)$. Siirrytään sylinterikoordinaatistoon, jonka origo sijaitsee pisteessä $(0, 0, z_0)$. Tällöin $\mathbf{r} - \mathbf{s} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z$, jossa $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ ja $\hat{\mathbf{e}}_z$ ovat sylinterikoordinaatiston lokaalin kannan vektoreita, ja $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Siten magneettikentän differentiaalinen elementti pisteessä $\mathbf{r}$ on:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz\hat{\mathbf{e}}_z \times (\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z)}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho\, dz\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \tag{159}$$

Ristitulo yhtälössä perustellaan jälleen sylinterikoordinaatiston lokaalin kannan syklisyydellä (ks. 2.1.3).

Ratkaistaan magneettikenttä $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ pisteessä $\mathbf{r}$ integroimalla yhtälöä (159) koko johtimen C yli ja käyttämällä sijoitusta $z = \rho\tan t$ vastaavasti kuin luvussa 3.4.1:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho\, dz\hat{\mathbf{e}}_\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt \tag{160}$$

Ohuessa suorassa johtimessa kulkevan virran I pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama magneettikenttä, eli magneettivuon tiheys $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, on siis:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{161}$$

Tässä ρ on pisteen $\mathbf{r}$ etäisyys johtimesta. Jälleen oikean käden sääntö havainnollistaa virran suunnan ja magneettikentän kenttäviivojen suhdetta: jos peukalo osoittaa virran kulkusuuntaan, johtimen ympärille kierretyt muut sormet osoittavat kenttäviivojen suunnan. Jos virta kulkee ylöspäin (joka kaavaa (161) johdettaessa käytetyssä koordinaatistossa tarkoittaisi, että I on positiivinen), kenttäviivat kiertävät johdinta vastapäivään. Jos virta kulkee alaspäin, kenttäviivat kiertävät johdinta myötäpäivään.

Biot'n ja Savartin laki voidaan esittää myös yleisemmässä muodossa, jossa ei oleteta virran kulkevan pitkin ohutta johdinta, vaan magneettikentän aiheuttaa virrantiheys $\mathbf{J}(\mathbf{s})$ (Jackson, 1999, s. 178):

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} dV \tag{162}$$

Oletetaan nyt, että $\mathbf{J}(\mathbf{s})$ on jatkuva jossakin rajatussa $\mathbb{R}^3$:n alueessa ja häviää tämän alueen ulkopuolella. Tällöin magneettikenttä $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ pisteessä $\mathbf{r}$ saadaan tilavuusintegraalina, joka suppenee kun $\mathbf{J}(\mathbf{s})$ toteuttaa nämä oletukset:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} dV \tag{163}$$

4.7 Maxwellin II yhtälö: Gaussin laki magneettikentille

Maxwellin II yhtälö, eli Gaussin laki magneettikentille, on differentiaalimuodossaan (Adams & Essex, 2018, s. 950):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{164}$$

Divergenssilauseen (20) nojalla yhtälö on integraalimuodossaan (Young & Freedman, 2020, s. 973):

$$\Phi_B = \oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \tag{165}$$

jossa S on mielivaltainen suljettu pinta ja $\mathbf{n}$ on pinnan yksikkönormaali.

Maxwellin II yhtälön differentiaalimuodon mukaan magneettikentällä ei ole lähteitä eikä nieluja. Tämä sopii yhteen näkemyksen kanssa, että luonnosta ei löydy magneettisia monopoleja eli vapaita magneettisia varauksia (Griffiths, 2013, s. 242). Vastaavasti magneettisilla kenttäviivoilla ei ole alku- eikä loppupistettä, kun ne oletetaan suljetuiksi silmukoiksi (tässä työssä sivuutetaan mahdollisuus muunlaisten kenttäviivojen olemassaololle). Maxwellin II integraalimuodon mukaan magneettivuon tiheys Φ_B umpinaisen pinnan läpi on 0.

Todistus (Moisio, 2025, s. 122-123): Jatkuvan virrantiheyden $\mathbf{J}$ aiheuttamalle magneettikentälle $\mathbf{B}$ voidaan konstruoida eräs vektoripotentiaali $\mathbf{A}$, jolloin $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ja on näin ilmeistä, että $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (ks. myös 2.2.15).

Kuten on jo aiemmin esitetty kaavan (163) yhteydessä, virrantiheyden $\mathbf{J}(\mathbf{s})$ pisteeseen $\mathbf{r}$ aiheuttama magneettikenttä $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ on:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3}\, dV \tag{166}$$

Magneettikentän $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (166) eräs vektoripotentiaali $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kaikissa pisteissä $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ on:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|} \, dV \tag{167}$$

Seuraavassa perustelut sille, että $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ on kentän $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ eräs vektoripotentiaali, toisin sanoen että $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})$:

Kun oletetaan, että $\mathbf{J}(\mathbf{s})$ on jatkuva ja rajoitettu jossakin rajatussa $\mathbb{R}^3$:n alueessa ja häviää tämän alueen ulkopuolella, yhtälön (167) integraali suppenee jokaisessa pisteessä $\mathbf{r}$, koska jokaisen komponenttifunktion integraali suppenee (Adams & Essex, 2018, s. 949).

Käyttäen hyväksi liitteen 5 vektorianalyysin identiteettiä (c), kentän $\mathbf{J}(\mathbf{s})$ riippumattomuutta muuttujasta $\mathbf{r}$ (jolloin $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}$), sekä tulosta $\nabla\big(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|}\big) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3}$, saadaan kaikilla $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla\Big(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|}\Big) \times \mathbf{J}(\mathbf{s}) \, dV \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \times \mathbf{J}(\mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \, dV \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{168}$$

(Tässä roottori lasketaan muuttujan $\mathbf{r}$ suhteen, ja integraali muuttujan $\mathbf{s}$ suhteen.)

Maxwellin II yhtälön (164) paikkansapitävyys on siten todettu.

4.8 Ampèren laki

Palataan vielä Biot'n ja Savartin lain siihen muotoon (163), joka esittää virrantiheyden $\mathbf{J}(\mathrm{s})$ pisteeseen $(\mathbf{r})$ aiheuttaman magneettikentän $\mathbf{B}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \, dV \tag{169}$$

Kuten yhtälön (163) yhteydessä on mainittu, virrantiheys $\mathbf{J}(\mathrm{s})$ oletetaan tässä jatkuvaksi jossakin rajatussa avaruuden $\mathbb{R}^3$ alueessa ja tämän alkueen ulkopuolella häviäväksi (ts. $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ alueen ulkopuolella). Lisäksi luvussa 4.7 esitetyn Maxwellin II yhtälön (164) nojalla magneettikenttä $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ on lähteetön, siis $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Tutkitaan seuraavaksi magneettikentän roottoria $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$ siten, että oletetaan virta stationaariseksi, eli $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. (Lähde todistukselle: Jackson, 1999, s. 179-180; Thidé, 2011, s. 8-9.) Koska roottori määritetään pisteen $\mathbf{r}$ suhteen, ja toisaalta kaavassa (169) tilavuusintegraali määritetään muuttujan s suhteen, voidaan roottorioperaattori viedä tilavuusintegraalin sisälle:

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \, dV \tag{170}$$

Hyödynnetään liitteen 5 kaavaa (e) sekä sitä, että $\mathbf{J}(\mathrm{s})$ on muuttujan $\mathbf{r}$ suhteen vakio:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{s}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} = \Big(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3}\Big)\mathbf{J}(\mathbf{s}) - \Big(\mathbf{J}(\mathbf{s}) \cdot \nabla\Big) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3} \tag{171}$$

Käsitellään ensin yhtälön (171) oikean puolen jälkimmäinen termi. Siinä voidaan siirtyä derivoinnista muuttujan $\mathbf{r}$ suhteen derivointiin muuttujan s suhteen muuttujien välisen symmetrian lausekkeessa $\dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|^3}$ nojalla. Esitetään kyseinen termi lisäksi komponenttifunktioittain (tarkoittaen x-, y- ja z-akselin suuntaisia komponentteja), joista jokaisesta

otetaan gradientti muuttujan $\mathbf{s}$ suhteen:

$$\big(\mathbf{J}(\mathbf{s})\cdot\nabla\big)\frac{\mathbf{s}-\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}=\mathbf{J}\cdot\nabla\frac{s_1-r_1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}+\mathbf{J}\cdot\nabla\frac{s_2-r_2}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}+\mathbf{J}\cdot\nabla\frac{s_3-r_3}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3} \tag{172}$$

Edelleen liitteen 5 kaavan (b) nojalle kullekin yhtälön (172) oikean puolen termille (esitetään tässä vain ensimmäinen termi, eli x-akselin suuntainen komponenttifunktio):

$$\mathbf{J}\cdot\nabla\frac{s_1-r_1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}=\nabla\cdot\Big(\mathbf{J}\frac{s_1-r_1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}\Big)-\frac{s_1-r_1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}\nabla\cdot\mathbf{J} \tag{173}$$

Koska on tehty oletus $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$, riittää tutkia, mitä tapahtuu yhtälön (173) oikean puolen ensimmäiselle termille $\nabla\cdot\Big(\mathbf{J}\frac{s_1-r_1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}\Big)$. Divergenssilauseen (20) nojalla, kun määritetään kyseisen termin tilavuusintegraali alueen V yli, saadaan kentän $\mathbf{J}\frac{s_1-r_1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}$ kokonaisvuo kyseisen alueen reunan eli pinnan läpi. Muistetaan samalla, että virrantiheys $\mathbf{J}(\mathbf{s})$ häviää jonkin rajatun avaruuden $\mathbb{R}^3$ alueen ulkopuolella, ja että toisaalta yhtälön (169) mukaisesti magneettikenttä $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ määritetään tilavuusintegraalina koko avaruuden $\mathbb{R}^3$ yli. Tällöin, kun alue valitaan mielivaltaisen suureksi, kentän $\mathbf{J}$ hävitessä sen aiheuttama kokonaisvuo alueen reunan läpi häviää myös (Adams & Essex, 2018, s. 950), ja seuraa:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot\Big(\mathbf{J}\frac{s_1-r_1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}\Big)\,dV=0 \tag{174}$$

Vastaava tulos pätee yhtälön (172) oikean puolen muillekin komponenttifunktioille.

Näin ollen magneettikentän $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ roottori $\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})$ riippuu ainoastaan yhtälön (170) mukaisesta tilavuusintegraalista yhtälön (171) oikean puolen ensimmäisen termin yli:

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathbb{R}^3}\Big(\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{s}}{\|\mathbf{r}-\mathbf{s}\|^3}\Big)\mathbf{J}(\mathbf{s})\,dV \tag{175}$$

Nyt liitteen 4 mukaisesti integroitava termi voidaan esittää deltadistribuutiona $4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{s})\mathbf{J}(\mathbf{s})$, jonka integrointimassa sijaitsee pisteessä $\mathbf{s}=\mathbf{r}$, jolloin

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}(4\pi\mathbf{J}(\mathbf{r})) = \mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}) \tag{176}$$

Näin on johdettu Ampèren laki differentiaalimuodossaan:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \tag{177}$$

Edelleen, Stokesin lauseen (21) ja yhtälön (138) nojalla voidaan johtaa Ampèren lain integraalimuoto:

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc} \tag{178}$$

Tässä siis I_{enc} on mielivaltaisen pinnan S, jonka positiivisesti suunnattu reunakäyrä ∂S on, läpäisevä kokonaisvirta.

Ampèren laki osoittaa integraalimuodossaan, että magneettikentän $\mathbf{B}$ käyräintegraali pitkin suljettua silmukkaa on suoraan verrannollinen silmukan läpäisevään virtaan I_{enc}. Differentiaalimuodon (177) mukaan kentän $\mathbf{B}$ pyörre on verrannollinen virrantiheyteen $\mathbf{J}$. Näin ollen pisteissä, joissa ei kulje virtaa, magneettikentän täytyy olla pyörteetön.

Ampèren laki pätee vain, kun $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ja siis virta on stationaarinen. Tämä on sopusoinnussa lain ylläolevan todistuksen yhteydessä tehdyn oletuksen kanssa, mutta on helppo todeta ilman todistukseen palaamistakin. Roottorin ja divergenssin ominaisuuksien nojalla (yhtälö (19)) nimittäin tiedetään, että yhtälön (177) vasemman puolen divergenssi on nolla riippumatta magneettikentästä $\mathbf{B}$:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = 0 \tag{179}$$

Tällöin väistämättä palataan lähtöoletukseen $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Stationaarisen virran synnyttämää magneettikenttää kutsutaan staattiseksi magneettikentäksi. Toisin esitettynä, staattinen magneettikenttä on sellainen magneettikenttä, joka toteuttaa Ampèren lain. Koska käytettävät termit vaihtelevat lähteestä ja käyttäjästä riippuen, korostuksen vuoksi toistetaan, että tässä tarkoitetaan Ampèren lakia sellaisena kuin se on yllä esitetty yhtälöissä (177) ja (178).

Kuten Ampèren laki esittää, staattinen magneettikenttä ei ole kaikkialla pyörteetön, mikä on ero staattiseen sähkökenttään nähden. Staattisella sähkökentällä on pyörre niissä pisteissä, joissa kulkee virta, eli joissa $\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$.

Toisaalta staattista sähkökenttää ja staattista magneettikenttää kuvaavia käsitteitä ja yhtälöitä voidaan nyt tiivistää seuraavasti:

Varaus tai varausjakauma aiheuttaa staattisen sähkökentän levossa, mutta varaus voi aiheuttaa magneettikentän, myös staattisen, vain ollessaan liikkeessä. Toisaalta sähkökenttä ja magneettikenttä kohdistavat varaukseen Lorentzin voiman (4.3), jonka magneettikentän aiheuttama osa on nollasta eroava vain sen kohdistuessa liikkuvaan varaukseen.

Coulombin laista johdettu sähkökentän määritelmä (86) kuvaa paikallisesti sähkövarauksen q aiheuttamaa sähkökenttää, ja siitä johdettu Maxwellin I yhtälö, eli Gaussin laki sähkökentille (114) ja (111), kuvaa yleisemmin varausjakauman ja sen aiheuttaman staattisen sähkökentän suhdetta. On myös todettu, että staattinen sähkökenttä on pyörteetön (yhtälö (89)).

Biot'n ja Savartin laki (156) kuvaa paikallisesti pienen vakiovirtaelementin $Id\mathbf{s}$ aiheuttamaa magneettikentän osaa, ja siitä johdettu Ampèren laki kuvaa yleisemmin stationaarisen virran ja sen aiheuttaman staattisen magneettikentän suhdetta. Lisäksi Maxwellin II yhtälö (164) ja (165), eli Gaussin laki magneettikentille, esittää magneettikentän olevan lähteetön.

Tietenkin Biot'n ja Savartin lakia Coulombiin lakiin rinnastaessa tulee muistaa, että pistevarauksen q voidaan katsoa olevan sellaisenaan olemassa ja tuottavan sähkökentän, kun taas yksittäisen virtaelementin $Id\mathbf{s}$ ei voida ajatella olevan olemassa ilman että se on osa suljettua virtapiiriä. Rinnastus voi hahmottua paremmin, jos tällöin ajattelee virtaelementin sijaan nopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvaa varausta q siten, että $Id\mathbf{l} \rightarrow q\mathbf{v}$ (Jackson, 1999, s. 176).

Ei-stationaarisen virran ($\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$) yhteyttä magneettikenttään käsitellään luvussa 5.1.

5 Ajasta riippuvat sähkö- ja magneettikentät

Aiemmin on tarkasteltu staattisia, ajasta riippumattomia sähkö- ja magneettikenttiä, joiden toiminta ei ole sidoksissa toisiinsa. Seuraavaksi käsitellään dynaamisia eli ajan suhteen muuttuvia sähkö- ja magneettikenttiä. Toisin kuin staattiset kentät, dynaamiset sähkö- ja magneettikentät esiintyvät aina yhdessä. Siksi niiden yhteydessä käytetään myös nimitystä ”sähkömagneettiset kentät”.

5.1 Maxwellin IV yhtälö: Ampère-Maxwellin laki, ja siirrosvirran tiheys

Tämä luku perustuu lähteeseen Griffiths, 2013, s. 334-335.

Palataan sähkövirran jatkuvuusyhtälöön (143). Jos nyt varaustiheys ρ on riippuva paikan $\mathbf{r}$ lisäksi ajasta t, seuraa, että $\frac{\partial \rho(\mathbf{r},t)}{\partial t} \neq 0$. Tällöin jatkuvuusyhtälön nojalla myös $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$, jolloin virta ei ole enää stationaarinen.

Jos toisaalta otetaan Ampèren laista (177) puolittain divergenssi, seuraa kaavan (19) nojalla, että $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$, jolloin täytyy myös olla $\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{J}) = 0$. Näin ollen Ampèren laki ei päde silloin, kun magneettikentän aiheuttavan virta on ei-stationaarinen. Niinpä jatkuvuusyhtälön nojalla seuraa:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}) = \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{180}$$

Vaikka varausjakauma ρ on nyt ajasta t riippuva, Gaussin lakia sähkökentille (114) voidaan soveltaa, jolloin:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{181}$$

Näin saadaan **Maxwellin IV yhtälö** eli Ampère-Maxwellin laki:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{182}$$

Tämä korjaustermi on kentänmuutosvirran eli siirrosvirran tiheys $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Kentänmuutosvirta ei nimestään huolimatta ole sananmukaisesti virta, vaikka sen yksikkö on ampeeri.

Stokesin lauseen (21) ja yhtälön (138) nojalla seuraa Maxwellin IV yhtälön integraalimuoto:

$$\int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{183}$$

Tässä S on mielivaltainen suunnattu pinta ja ∂S sen positiivisesti suunnattu reunakäyrä. I_{enc} on pinnan läpäisevä kokonaisvirta.

Maxwellin IV lain mukaan virta ja/tai ajasta riippuvan sähkökentän muutos aiheuttavat magneettikentän. Nyt siis myös magneettikenttä $\mathbf{B}$ on ajan suhteen muuttuva.

Korjaustermin eli kentänmuutosvirran tiheyden $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ kuvaama ilmiö on esimerkiksi, kun sähköisessä piirissä oleva kondensaattori, joka varastoi energiaa sähkökenttään, latautuu tai purkautuu, jolloin $\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \neq \mathbf{0}$. Tällöin syntyy magneettikenttä, joka ei ole peräisin sähkövirrasta eikä näin Ampèren laki (177) selitä sen olemassaoloa.

Yllä käytettiin sähkövirran jatkuvuusyhtälöä (143) Ampère-Maxwellin lain johtamiseen, ja toisaalta se on johdettavissa Maxwellin yhtälöistä. Jatkuvuusyhtälö saadaan Ampère-Maxwellin laista (182) ja Gaussin laista sähkökentille (114) seuraavasti (divergenssin ja aikaderivaatan järjestyksen vaihtaminen selitetään siten, että divergenssi ei riipu ajasta):

$$\nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} \tag{184}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{185}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \tag{186}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{187}$$

5.2 Sähkömotorinen voima ja Faradayn induktiolaki

Tämä luku käsittelee sitä, miten sähkömagneettiset kentät indusoivat silmukkaan sähkömotorisen voiman.

5.2.1 Sähkömotorinen voima

Luvussa 4.3 on käsitelty sähkökentän $\mathbf{E}$ ja magneettikentän $\mathbf{B}$ varaukseen q kohdistamaa Lorentzin voimaa $\mathbf{F}$, joka määritellään yhtälöllä:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{188}$$

Tässä asiayhteydessä yhtälön suureet ovat myös ajasta riippuvia, jolloin se voidaan esittää muodossa.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t), t)) \tag{189}$$

Kullakin ajanhetkellä t varaukseen q kohdistuva voima $\mathbf{F}$ riippuu siis ajasta t ja varauksen sijainnista $\mathbf{r}(t)$, sekä varauksen nopeudesta $\mathbf{v}(t) = \dfrac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$. Määritellään nyt Lorentzin voiman aiheuttama sähkömotorinen voima ε. Tämä luku perustuu lähteisiin Purcell & Morin, 2013, s. 347 ja Griffits, 2013, s. 303-305.

Olkoon sähkömagneettisessa kentässä sijaitseva ohut silmukka C ja yksikkövaraus q, joka kulkee kerran nopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvan silmukan ympäri niin nopeasti, että silmukan sijainti ei olennaisesti ehdi muuttua. Tällöin sähkömotorisen voiman vaikutus määritellään voiman $\mathbf{F}$ tekemänä työnä W suhteessa varaukseen q:

$$\varepsilon = \frac{W}{q} = \frac{1}{q}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{190}$$

Sähkömotorisen voiman yksikkö on voltti, eikä se nimestään huolimatta ole voima. Koska sähkömotorinen voima määritellään integraalina suljetun silmukan yli, siitä ei itsessään voida puhua sähköisenä potentiaalierona eli jännitteenä, vaan se aiheuttaa piiriin potentiaalieron. Sähkömotorisesta voimasta käytetään myös nimeä lähdejännite.

Kun silmukka on johdinsilmukka, sähkömotorinen voima saa virran kulkemaan siinä, ja virran suunta määräytyy sähkömotorisen voiman merkistä. Sähkömotorinen voima on skalaari, mutta se voi olla positiivinen tai negatiivinen. Tulos riippuu siitä, miten yhtälön (190) integroimiskäyrän, eli silmukan C, suunta on valittu. Integraalin arvo, eli sähkömotorinen voima, vaihtaa merkkiä, jos integroidaan pitkin silmukkaa myötäpäivään (negatiiviseen kiertosuuntaan) verrattuna siihen, jos integroidaan vastapäivään (positiiviseen kiertosuuntaan). Joka tapauksessa, kun sähkömotorinen voima on määritetty käyräintegraalina silmukan pituusalkion $d\mathbf{l}$ mukaisessa integrointisuunnassa, on sen aiheuttaman virran suunta sama kuin integroimissuunta, jos $\varepsilon > 0$, ja päinvastainen kuin integroimissuunta, jos $\varepsilon < 0$.

Jos nimittäin $\varepsilon > 0$, on myös kaavan (190) nojalla sähkömotorisen voiman aiheuttavan voiman $\mathbf{F}$ positiiviseen varaukseen tekemä työ positiivinen. Tällöin käyräintegraalin (8) määritelmän mukaisesti kenttä $\mathbf{F}$ tekee varaukseen työtä silmukan C eli valitun integroimissuunnan suuntaisesti. Positiivisen varauksen kulkusuunta määrää virran positiivisen kulkusuunnan (ks. luku 4.1). Vastaavalla päättelyllä seuraa, että jos $\varepsilon < 0$, on virran suunta päinvastainen käyrän C suuntaan nähden.

Kun sanotaan, että sähkömotorinen voima aiheuttaa piiriin potentiaalieron eli jännitteen, tätä ei pidä sekoittaa potentiaalieroon samassa merkityksessä kuin staattisten sähkökenttien yhteydessä. Jos näin olisi, suljetun käyräintegraalin (190) arvo olisi 0. Tässä voi ajatella jännitelähteen ja johtimen muodostamaa piiriä. Jännitelähteen tuottama sähkömotorinen voima, eli piirin lähdejännite, aiheuttaa jännitelähteen plus- ja miinusnapojen (pysyvien tai vuorottelevien) välisen potentiaalieron. Tämä potentiaaliero saa virran kulkemaan johtimessa jännitelähteen plusnapaan kytketystä johtimen päästä miinusnapaan kytkettyyn päähän.

Yhtälöstä (190) voidaan erottaa sähkökentän $\mathbf{E}$ ja magneettikentän $\mathbf{B}$ indusoimat sähkömotoriset voimat:

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{191}$$

$$\varepsilon = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{192}$$

Luvussa 4.3 todettiin, että magneettikenttä $\mathbf{B}$ ei tee työtä varaukseen. Herää kysymys, miten sähkömotorinen voima voi indusoitua yhtälön (192) mukaisesti. Tällöin tarvittava energia on peräisin silmukan liikkeestä. Jos $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ei sähkömotorista voimaakaan indusoidu.

Edelleen, sähkökenttä $\mathbf{E}$ voi indusoida sähkömotorisen voiman (yhtälö (191)) vain, kun se ei ole pyörteetön. Kuten aiemmin on todettu, pyörteettömälle eli staattiselle sähkökentälle $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ (ks. myös ”Stokesin lause” 2.2.13).

Jotkin lähteet (ks. esimerkiksi Hayt, 2012, s. 282) lisäävät suureen $\mathbf{E}_m$, jolle $\mathbf{E}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ja joka määritellään käsitteenä ”liikkeen aiheuttama sähkökentän voimakkuus” (eng. ”motional electric field intensity”), korostaakseen yhteyttä sähkömotorisen voiman indusoitumiseen. Lisäksi sähkömotorinen voima voidaan nimetä eri tavoin riippuen sen syntymekanismista: englanninkielisin termein yhtälön (192) mukainen, silmukan liikkeen aiheuttama sähkömotorinen voima on ”motional emf”, ja yhtälön (191) sähkökentän indusoima sähkömotorinen voima on ”transformer emf”.

5.2.2 Faradayn induktiolaki

Tässä luvussa esitetään Faradayn induktiolaki ja kolme sen syntymiseen vaikuttanutta kokeellista havaintoa siitä, millä tavoilla sähkömotorinen voima voi indusoitua. Nämä kokeelliset havainnot ovat (Griffiths, 2013, s. 312):

1. Kokeessa 1 johdinsilmukka liikkuu magneettikentän läpi. Tällöin silmukan läpäisevä magneettivuo muuttuu, ja magneettiset voimat aiheuttavat silmukkaan sähkömotorisen voiman, joka johtavassa silmukassa saa virran kulkemaan.

2. Kokeessa 2 johdinsilmukka pysyy paikallaan, ja magneetin siirtäminen muuttaa magneettikenttää silmukkaan nähden. Magneettiset voimat eivät vaikuta paikallaan oleviin varauksiin. Kuitenkin tässäkin silmukkaan aiheutuu sähkömotorinen voima, ja silmukassa alkaa kulkea virta. Kentän, joka kohdistaa voiman levossa oleviin varauksiin, täytyy olla sähkökenttä. Seuraa tärkeä johtopäätös: ajan suhteen muuttuva magneettikenttä indusoi sähkökentän. Ja koska tämä sähkökenttä on pyörteinen, se aiheuttaa umpinaiseen johdinsilmukkaan sähkömotorisen voiman yhtälön (191) mukaisesti.

3. Edelleen, kokeessa 3 sekä johdinsilmukka että magneetti pysyvät paikoillaan, mutta magneettikentän voimakkuutta muutetaan, mikä on mahdollista, koska magneetti on sähkömagneetti. Jälleen silmukassa alkaa kulkea virta. Tässäkin siis magneettikenttä muuttuu, olkoonkin että eri syystä kuin kokeessa 2, ja magneettikentän muutos ajan suhteen indusoi sähkökentän ja silmukkaan sähkömotorisen voiman.

Tällaisten havaintojen perusteella on määritelty Faradayn induktiolaki:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} \tag{193}$$

Faradayn induktiolaki ilmaisee, että silmukan läpäisevän magneettivuon $\Phi_{\mathbf{B}}$ muutos ajan suhteen indusoi silmukkaan sähkömotorisen voiman ε.

Vektorikentän vuon määritelmän (9) mukaisesti magneettivuo $\Phi_{\mathbf{B}}$ on magneettivuon tiheyden $\mathbf{B}$ aiheuttama vuo läpi pinnan S, jonka yksikkönormaali on $\mathbf{n}$:

$$\Phi_{\mathbf{B}} = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{194}$$

Indusoituvan sähkömotorisen voiman, ja näin ollen sähkömotorisen voiman johdinsilmukkaan aiheuttaman virran, suunta riippuu siitä, onko magneettivuon derivaatan vastaluku kaavan oikealla puolella negatiivinen vai positiivinen. Sitä, miten vuon suunta silmukan rajaaman pinnan läpi ja sähkömotorisen voiman suunta silmukassa ovat sidoksissa toisiinsa, kuvaa matemaattisesti suunnatun pinnan ja sen reunakäyrän yhteys, jota on käsitelty luvussa 2.2.4.

Negatiivisen etumerkin merkitys induktiolain (193) oikealla puolella liittyy Lenzin lakiin. Lenzin lain mukaan magneettikentän muutoksen indusoiman sähkömotorisen voiman aiheuttama virta kulkee aina sellaiseen suuntaan, että virran aiheuttama magneettikenttä vastustaa alkuperäistä magneettikentän muutosta. Tämä merkitsee, että esimerkiksi magneettikentässä liikkuvaan silmukkaan indusoituva sähkömotorinen voima ei entisestään kiihdytä silmukan liikettä, vaan on sitä vastaan. Toisin sanoen systeemiin ei synny energiaa tyhjästä. Jotta silmukka saadaan pidettyä liikkeessä vakionopeudella, systeemin ulkopuolelta täytyy tulla energiaa. (Purcell & Morin, 2013 s. 351-352.)

Mainittujen kokeellisten havaintojen mukaisesti sähkömotorinen voima indusoituu johdinsilmukkaan Faradayn induktiolakia (193) noudattaen riippumatta siitä, pysyykö silmukan sijainti vai magneettikenttä samana. Olennaista on, että joka tapauksessa silmukkaan vaikuttava magneettikenttä muuttuu ajan funktiona. Itse asiassa havainto, että jokainen näistä kokeista tuotti vastaavan sähkömotorisen voiman, vaikutti suppean suhteellisuusteorian syntymiseen. (Griffiths, 2013, s. 314.)

Edellä mainittuihin kokeellisiin havaintoihin, ja erityisesti kokeen 2 yhteydessä esitettyyn johtopäätökseen magneettikentän ja sähkökentän yhteydestä, palataan luvussa 5.3. Kokeet havainnollistavat sitä, että ajasta riippuvat sähkö- ja magneettikentät esiintyvät yhdessä.

5.2.3 Liikkuvaan silmukkaan kohdistuva magneettikenttä

Tässä luvussa käsitellään erityisesti sähkömotorisen voiman ε indusoitumista silmukkaan tilanteessa, jossa silmukka liikkuu magneettikentässä $\mathbf{B}$ nopeudella $\mathbf{v}$. Luku perustuu lähteeseen Purcell & Morin, 2013, s. 350-351.

Aiemmin on esitetty, miten tällä tavalla määritettyyn silmukkaan indusoituu sähkömotorinen voima yhtälön (192) mukaisesti, eli Lorentzin voiman magneettisen osan vaikutuksesta. Sitten on esitetty yleisesti, että silmukkaan, joka kokee magneettikentän muutoksen ajan suhteen (riippumatta siitä, liikkuuko silmukka vai onko levossa), indusoituu sähkömotorinen voima Faradayn induktiolain (193) mukaan. Tämän luvun tarkoituksena on liittää nämä ilmiöt toisiinsa matemaattisesti siten, että rajoitutaan silmukkaan, jonka katsotaan liikkuvan magneettikentässä $\mathbf{B}$ ja kokevan magneettikentän muutoksen ajan suhteen nimenomaan vain oman liikkeensä seurauksena. Niinpä tässä tarkoitetaan sähkömotorisella voimalla ”silmukan liikkeen aiheuttamaa sähkömotorista voimaa” (ks. 5.2.1).

Oletetaan, että magneettikenttä $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ pisteessä $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ on vakio ajan t suhteen, toisin sanoen magneettikenttä kiinnitetyssä koordinaatiston pisteessä pysyy vakiona.

Olkoon myös silmukka C, joka liikkuu nopeudella $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ magneettikentässä ajan t funktiona. Tällöin silmukkaan vaikuttaa magneettikenttä $\mathbf{B}(\mathbf{r}(t))$. Tällöin yhtälön (194) mukainen magneettivuo $\Phi_{\mathbf{B}}$ läpi pinnan S, jonka positiivisesti suunnattu reunakäyrä C on, on myös ajasta riippuva, jolloin $\Phi_{\mathbf{B}}(t)$ on magneettivuo kullakin ajanhetkellä t.

Maxwellin II yhtälön (164) mukaisesti magneettikenttä $\mathbf{B}$ on lähteetön. Niinpä pätee luvussa 2.2.15 esitetty tulos, jonka mukaan lähteettömän kentän vuo riippuu vain valitun pinnan reunakäyrästä siten, että vuo on sama jokaisen sellaisen pinnan läpi, joilla on yhteinen reunakäyrä. Jos kaksi tällaista pintaa yhdistetään reunakäyrästään umpinaiseksi pinnaksi, täytyy divergenssilauseen (20) nojalla sen lähteettömän vektorikentän vuon, joka menee sisään yhdestä näistä pinnoista, tulla ulos toisesta.

Ajanhetkellä t silmukka C on suunnatun pinnan A_1, jonka läpäisee magneettivuo $\Phi_{\mathbf{B}}(t)$, positiivisesti suunnattu reunakäyrä. Toisaalta ajanhetkellä t silmukka on myös toisen pinnan $A_2 + dA$ positiivisesti suunnattu reunakäyrä. Tässä A_2 on se pinta, jonka hetkeä dt myöhemmin läpäisee magneettivuo $\Phi_{\mathbf{B}}(t+dt)$ silmukan C liikuttua kohtaan, jossa se on pinnan A_2 positiivisesti suunnattu reunakäyrä. dA on se pinta, joka jää sellaisten käyrien väliin, joita määrittävät silmukan C sijainnit ajanhetkillä t ja $t + dt$.

Koska C sijainnissaan ajanhetkellä t on positiivisesti suunnattu reunakäyrä sekä pinnalle A_1 että $A_2 + dA$, magneettikentän lähteettömyyden nojalla seuraa, että tällöin magneettikentän $\mathbf{B}$ vuo silmukan rajaaman pinnan läpi on:

$$\Phi_{\mathbf{B}}(t) = \iint_{A_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{A_2+dA} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{195}$$

Tässä $\mathbf{n}$ on siis pintojen A_1 ja $A_2 + dA$ positiivisten puolten yksikkönormaali. Silmukan C katsotaan reunakäyränä määräävän rajaamiensa pintojen suuntauksen (ks. 2.2.4).

Ajanhetkellä $t + dt$ silmukan C rajaaman pinnan A_2 positiivisen puolen yksikkönormaali osoittaa samaan suuntaan kuin hetkellä t. Siten magneettikentän $\mathbf{B}$ vuo silmukan hetkellä $t + dt$ rajaaman pinnan läpi on:

$$\Phi_{\mathbf{B}}(t + dt) = \iint_{A_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{196}$$

Määritellään yhtälöiden (195) ja (196) nojalla vuon muutos $d\Phi_{\mathbf{B}}$ ajassa dt, eli ajanhetkestä t ajanhetkeen $t + dt$:

$$\begin{aligned} d\Phi_{\mathbf{B}} &= \Phi_{\mathbf{B}}(t + dt) - \Phi_{\mathbf{B}}(t) \\ &= \iint_{A_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS - \iint_{A_2+dA} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_{dA} \mathbf{B} \cdot (-\mathbf{n})\, dS \end{aligned} \tag{197}$$

Tässä $-\mathbf{n}$ on toinen pinnan dA yksikkönormaaleista. Merkitään nyt $\mathbf{n}_2 := -\mathbf{n}$. Yllä esitetyn nojalla täytyy vuon $d\Phi_\mathbf{B}$ olla kentän $\mathbf{B}$ vuo pinnan dA läpi:

$$d\Phi_\mathbf{B} = \iint_{dA} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS \tag{198}$$

Silmukka C kulkee ajassa dt matkan $\mathbf{v}\, dt$. Lisäksi $d\mathbf{l}$ on silmukan differentiaalinen pituusalkio. Näiden vektorien ristitulon $(\mathbf{v}\, dt) \times d\mathbf{l}$ suunta on sama kuin pinnan dA yksikkönormaalin $\mathbf{n}_2$. Tämä ristitulo virittää suunnikkaan, jonka ala integroituna käyrän C pituuden suhteen antaisi pinnan dA alan. Nyt siis voidaan muuttaa yhtälön (198) pintaintegraali suljetuksi käyräintegraaliksi pitkin käyrää C:

$$d\Phi_\mathbf{B} = \iint_{dA} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2 \, dS = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v}\, dt \times d\mathbf{l}) \tag{199}$$

Aika dt on integroinnin suhteen vakio, joten yhtälö (199) voidaan jakaa sillä puolittain:

$$\frac{d\Phi_\mathbf{B}}{dt} = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \tag{200}$$

Skalaarikolmitulon (ks. 2.1.1) ominaisuuksien sekä ristitulon antikommutatiivisuuden nojalla seuraa:

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{201}$$

Nyt magneettikentässä $\mathbf{B}$ liikkuvaan silmukkaan C kohdistuva, silmukan liikkeestä johtuva magneettivuon $\Phi_\mathbf{B}$ muutos ajan suhteen saadaan käyräintegraalina:

$$-\frac{d\Phi_\mathbf{B}}{dt} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{202}$$

Näin on todistettu, että yhtälöiden (192) (liikkeen aiheuttama sähkömotorinen voima) ja (193) (Faradayn induktiolaki) esitykset sähkömotorisen voiman ε indusoitumiselle magneettikentässä liikkuvaan silmukkaan ovat matemaattisesti yhtäpitäviä.

Kertauksena todetaan jälleen, että tässä yhteydessä tarkoitetaan magneettikenttää, jonka muutoksella ajan suhteen tarkoitetaan vain suhteellista muutosta, joka seuraa silmukan liikkeestä. Luvussa 5.3.2 käsitellään tilannetta, jossa magneettikenttä muuttuu ajan suhteen myös kiinnitettyyn koordinaatiston pisteeseen nähden.

5.3 Maxwellin III yhtälö: Faradayn laki

Tässä luvussa viitataan aiemmin luvussa 5.2.2 käsiteltyihin sähkömotorisen voiman indusoitumiseen liittyviin kokeellisiin havaintoihin, koska ne ovat vaikuttaneet olennaisesti Maxwellin III yhtälön eli Faradayn lain syntyyn.

Kuten aiemmin on esitetty, pyörteinen sähkökenttä $\mathbf{E}$ indusoi silmukkaan C sähkömotorisen voiman ε:

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{203}$$

Lisäksi tähän mennessä on käsitelty Faradayn induktiolaki, joka esittää, miten magneettikentän $\mathbf{B}$ muutos ajan suhteen indusoi silmukkaan sähkökentän.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} \tag{204}$$

Rajoitutaan toistaiseksi luvussa 5.2.2 esitettyjen kokeiden 2 ja 3 mukaiseen tilanteeseen, jossa magneettikenttä $\mathbf{B}$ muuttuu ajan t funktiossa suhteessa koordinaatiston kiinnitettyyn pisteeseen, jolloin myös magneettikentässä olevaan silmukkaan C kohdistuu kentän muutos ajan suhteen, vaikka silmukka pysyy levossa. On todettu, että magneettikenttä ei voi kohdistaa voimaa levossa oleviin varauksiin, vaan ainoastaan sähkökenttä, ja että ajan

suhteen muuttuvan magneettikentän täytyy indusoida sähkökenttä, jotta levossa olevaan silmukkaan voi syntyä sähkömotorinen voima.

Olkoon S pinta, jonka positiivisesti suunnattu reunakäyrä silmukka C on. Edelleen, kun silmukka ja sen sijainti eivät muutu ajan funktiona, niin:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{205}$$

Toisaalta Stokesin (21) lauseen nojalla seuraa:

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \iint_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{206}$$

Yhdistetään (205) ja (206) oikeat puolet:

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{207}$$

Koska S on mielivaltainen, täytyy olla:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{208}$$

Yhtälö (208) on **Maxwellin III yhtälö** eli Faradayn laki differentiaalimuodossaan. Sen mukaan ajan suhteen muuttuva magneettikenttä indusoi pyörteisen sähkökentän. Negatiivinen etumerkki yhtälön oikealla puolella liittyy Lenzin lakiin vastaavasti kuin Faradayn induktiolaissa (ks. luku 5.2.2).

Stokesin lauseen (21) nojalla, kun S on mielivaltainen suunnattu pinta, $\mathbf{n}$ sen yksikkönormaali ja I pinnan läpäisevä kokonaisvirta, seuraa Maxwellin III yhtälö integraalimuodossa:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{209}$$

Kun nyt on käsitelty sekä Faradayn induktiolakia että Faradayn lakia eli Maxwellin III yhtälöä, seuraa huomautuksia termien käytöstä. Griffithsin mukaan Faradayn induktiolakia eli yhtälöä (193) ei tulisi kutsua Faradayn laiksi, koska tämä voisi häivyttää erot tavoissa, joilla sähkömotorinen voima voi indusoitua, ja että tilannetta, jossa sähkömotorisen voiman indusoituminen silmukkaan johtuu nimenomaan silmukan liikkeestä magneettikentässä, ei tulisi pitää ilmentymänä Faradayn lain toiminnasta (Griffiths, 2013, s. 314).

Vaikka käytettävässä terminologiassa esiintyy vaihtelua, on syytä osata erottaa Faradayn induktiolain (193), ja Maxwell-Faradayn yhtälön eli Maxwellin III yhtälön, jota myös kutsutaan Faradayn laiksi (esim. Adams & Essex, 2018, s. 949), yhtälöt (208) ja (209), merkitykset toisistaan. Seuraavassa on joitakin perusteluja tähän.

Kokeen 1 mukaisessa tilanteessa, jossa magneettikenttä $\mathbf{B}$ vaikuttaa siinä nopeudella $\mathbf{v}$ liikkuvaan silmukkaan C ja aiheuttaa siihen sähkömotorisen voiman, tämän sähkömotorisen voiman ε tuottaa Lorentzin voiman magneettisen osan vaikutus silmukassa oleviin varauksiin jo aiemmin mainitun yhtälön mukaisesti:

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \tag{210}$$

Muistetaan, että tässä magneettikenttä ei itsessään muutu kiinnitettyyn koordinaatiston pisteeseen nähden, vaan olennaista on suhteellinen muutos silmukkaan nähden silmukan liikkeestä johtuen. Lorentzin voimaa on käsitelty luvussa 4.3.

Kokeiden 2 ja 3 mukaisissa tilanteissa ajan funktiona muuttuva magneettikenttä vaikuttaa paikallaan olevaan silmukkaan siten, että magneettikentän muutos indusoi sähkökentän, joka tuottaa silmukkaan sähkömotorisen voiman.

Kuten todettu, sähkömotorisen voiman silmukkaan tuottamisen kannalta ei ole oleellista, liikkuuko silmukka magneettikenttään nähden vai muuttuuko magneettikenttä jossa silmukka on levossa.

Faradayn induktiolaki (193) kuvaa siis edelleen sähkömotorisen voiman indusoitumista silmukkaan sen seurauksena, että silmukkaan vaikuttava magneettikenttä muuttuu ajan funktiona, eikä ota kantaa siihen, millä edellä kuvatuista tavoista tämä muutos tapahtuu.

Maxwellin III yhtälö (208) ja (209) puolestaan kuvaa sitä, miten muuttuva magneettikenttä indusoi sähkökentän, kun magneettivuon muutos silmukkaan nähden ajan funktiona tapahtuu silmukan pysyessä levossa. Kuten edellä on todettu, sähkömotorisen voiman tuottaminen levossa olevaan silmukkaan on mahdollista nimenomaan sähkökentälle, ja näin yhtälö siis kuvaa mekanismin sähkömotorisen voiman indusoitumisen taustalla, ei niinkään sähkömotorisen voiman indusoitumista itsessään.

Ennen kaikkea Maxwellin III yhtälö siis esittää ajan suhteen muuttuvan magneettikentän ja sähkökentän välisen yhteyden, vaikka sen integraalimuodon (209) kumpikin puoli antaakin indusoituvan sähkömotorisen voiman.

Yhtälön differentiaalimuoto (208) esittää magneettikentän ja sen muutoksen indusoiman sähkökentän välisen yhteyden yksittäisessä silmukan rajaaman pinnan pisteessä. Jokaisessa silmukan rajaaman pinnan pisteessä, jossa magneettivuon tiheys muuttuu ajan funktiona, indusoituu pyörteinen, magneettivuon tiheysvektorin ympärillä pyörivä sähkökenttä. Magneettivuon tiheyden aikaderivaatan suuruus ilmaisee sähkökentän pyörinnän määrä, ja aikaderivaatan suunta pyörinnän suunnan.

Stokesin lause (21) luo yhteyden Maxwellin III yhtälön differentiaali- ja integraalimuotojen välille. Se ilmaisee, että silmukan rajaamalla pinnalla tapahtuvat sähkökentän pyörinnät yhteenlaskemalla, eli integroimalla pyörintöjen määrä ko. pinnan yli, saadaan sähkökentän tekemä työ kerran silmukan ympäri kuljettaessa.

5.3.1 Laskuesimerkki: Magneettikentän indusoima sähkökenttä

Havainnollistetaan Maxwellin III yhtälöä (208) ja Lenzin lakia (luku 5.2.2) yksinkertaisella laskuesimerkillä.

Määritä tasaisen, vain ajasta riippuvan magneettikentän $\mathbf{B}(t)$, jonka kenttäviivat täyttävät ρ-säteisen kiekon ja osoittavat ylöspäin, kiekkoa rajaavalle silmukalle C indusoima sähkökenttä $\mathbf{E}$. Silmukkaa ei tässä vaiheessa tarvitse olettaa fysikaaliseksi objektiksi. (Griffiths, 2013, s. 317.)

Kiekon yksikkönormaaliksi valitaan $\hat{\mathbf{e}}_z$, jolloin sen positiivisesti suunnattu (vastapäivään kulkeva) reunakäyrä C on vektorin $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ suuntainen. Nyt $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ tai $\mathbf{E} = E(-\hat{\mathbf{e}}_\varphi)$, joissa $E = \|\mathbf{E}\|$. Merkitään ratkaisun yksinkertaistamiseksi ensin, että sähkökentän suunnasta riippumatta $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ siten, että E voi olla myös negatiivinen. Tällöin Maxwellin III yhtälön (209) vasemmasta puolesta seuraa:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} E\hat{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \rho \, d\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi = 2\pi\rho E \tag{211}$$

Maxwellin III yhtälön oikeasta puolesta seuraa, kun silmukka C rajaa pinnan S:

$$-\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\, dS = -\frac{d}{dt}\iint_S B\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \, dS = -\frac{d}{dt}\iint_{x^2+y^2\leq\rho^2} B\, dxdy = -\pi\rho^2\frac{d}{dt}B \tag{212}$$

Vasenta ja oikeaa puolta vertaamalla ratkaistaan E:

$$E = -\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}B \tag{213}$$

Nyt oletetaan, että E on ei-negatiivinen, jolloin:

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}B\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{214}$$

kun magneettivuon tiheys vähenee ajan funktiona, ja toisaalta

$$\mathbf{E} = E(-\hat{\mathbf{e}}_\varphi) = \frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}B(-\hat{\mathbf{e}}_\varphi) \tag{215}$$

kun magneettivuon tiheys kasvaa.

Oletetaan nyt, että silmukka on johdinsilmukka, jolloin siinä alkaa magneettikentän muutoksen johdosta kulkea sähkökentän $\mathbf{E}$ indusoiman sähkömotorisen voiman suuntainen virta I.

Yhtälön (214) mukaisesti magneettikentän heikkenemisen aiheuttama virta kulkee silmukassa vastapäivään, koska yhtälöä (211) vastaavan laskutavan mukaisesti $\varepsilon = 2\pi\rho E$, jossa $E > 0$. Koska ε on määritetty integroimalla vastapäivään pitkin käyrää C (pituusalkio $d\mathbf{l} = \rho d\varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi$), ja koska näin saatu sähkömotorinen voima $\varepsilon > 0$, tämä kertoo, että sähkömotorisen voiman aiheuttama potentiaaliero saa virran kulkemaan niin ikään vastapäivään (luku 5.2.1). Lenzin lain mukaisesti syntyy alkuperäistä magneettikenttää vahvistava magneettikenttä, koska oikean käden säännön (luku 4.5) mukaisesti virran kulkiessa silmukassa vastapäivään osoittaa sen aiheuttaman magneettikentän z-akselin suuntainen komponentti silmukan sisällä ylöspäin. Oikean käden säännön käyttäminen tarkoittaa tässä sitä, että jos peukalo olisi silmukalla ja osoittaisi virran kulkusuuntaan, osoittaisivat silmukan ympäri kiertyneet muut sormet virran aiheuttaman magneettikentän kenttäviivojen kiertosuunnan.

Toisaalta yhtälön (215) mukaisessa tilanteessa magneettikentän vahvistumisen aiheuttama virta kulkee silmukassa myötäpäivään. Tällöin nimittäin, koska sähkömotorinen voima määritetään edelleen yhtälöä (211) vastaavalla tavalla integroiden silmukkaa pitkin vastapäivään ja koska sähkömotorinen voima $\varepsilon = 2\pi\rho(-E)$ ja siten negatiivinen, sen aiheuttaman virran suunta on integrointisuuntaan nähden päinvastainen. Tällöin jälleen Lenzin lain mukaisesti virta aiheuttaa magneettikentän, jonka z-akselin suuntainen komponentti osoittaa silmukan sisällä alaspäin ja näin on alkuperäisen magneettikentän muutosta vastaan.

5.3.2 Maxwellin III yhtälö magneettikentässä liikkuvalle silmukalle

Tämän osion tarkoitus on täydentää luvussa 5.3 esitettyä Maxwellin III yhtälön johtamista, jossa tehtiin oletus silmukan pysymisestä vakiona ajan suhteen. Se perustuu ensisijaisesti lähteeseen Thidé, 2011, s. 12-14.

Olkoon silmukka C, joka liikkuu ajasta t riippuvassa magneettikentässä $\mathbf{B}$ ajan funktiona. Nyt silmukkaan vaikuttava magneettikenttä riippuu ajasta ja ajan funktiona muuttuvasta paikasta $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Olkoon myös pinta S, jonka reunakäyrä C on.

Edelleen yhtälöiden (203) ja (193) mukaisesti silmukkaan indusoituu sähkömotorinen voima $\varepsilon = \varepsilon(t)$ seuraavasti:

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}_{smv} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{216}$$

Tässä $\mathbf{E}_{smv}$ on sähkökenttä, joka vaikuttaa silmukkaan koordinaatistossa, jossa silmukan katsotaan olevan levossa. Samassa koordinaatistossa silmukkaan vaikuttava magneettikenttä on $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{r}(t))$, ja siksi sen derivaatalle ajan suhteen on käytettävä liitteessä 6 johdettua derivointisääntöä (268), joka nyt saa muodon:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{217}$$

jossa nopeus $\mathbf{v}$ on paikan $\mathbf{r}(t)$ muutos ajan suhteen: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Lisäksi $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Ketjusääntöä (217) käyttäen yhtälöstä (216) seuraa:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS - \iint_S (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{218}$$

Otetaan puolittain divergenssi Maxwellin III yhtälöstä differentiaalimuodossa (208):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{219}$$

Koska yhtälön (219) vasen puoli on nolla riippumatta ajasta t, ja koska $\mathbf{B}$ katsotaan ajan suhteen muuttuvaksi, täytyy ajan t arvoista riippumatta olla $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Näin ollen Maxwellin II yhtälö (164) pitää paikkansa myös ajan suhteen muuttuvien kenttien tapauksessa.

Käytetään liitteen 5 vektorianalyysin identiteettiä (e), joka kentille $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{B}$ näyttää tältä:

$$\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} \tag{220}$$

Maxwellin II yhtälön (164) ja sen, että nopeus $\mathbf{v}$ riippuu vain ajasta t, nojalla yhtälö (220) yksinkertaistuu muotoon:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \tag{221}$$

Nyt yhtälöistä (216), (218) ja (221) seuraa:

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}_{smv} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS - \iint_S \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{222}$$

Käytetään Stokesin lausetta kahteen kertaan:

$$\oint_C \mathbf{E}_{smv} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS - \oint_C (\mathbf{B} \times \mathbf{v})\, d\mathbf{l} \tag{223}$$

$$\oint_C (\mathbf{E}_{smv} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{224}$$

$$\iint_S \nabla \times (\mathbf{E}_{smv} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{225}$$

Koska pinta S on mielivaltainen, seuraa:

$$\nabla \times (\mathbf{E}_{smv} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{226}$$

Muistetaan edelleen, että tässä $\mathbf{E}_{smv}$ on sähkömotorisen voiman liikkuvaan silmukkaan indusoiva sähkökenttä koordinaatistossa, joka liikkuu silmukan mukana eli jossa silmukka on levossa. Toisaalta kiinnitetyssä koordinaatistossa havaitaan sähkökenttä $\mathbf{E}$ siten, että:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{smv} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{227}$$

Nimittäin, nopeudella $\mathbf{v}$ (kiinnitetyssä koordinaatistossa) liikkuvaan pistevaraukseen q aiheutuu Lorentzin voima $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_{smv} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{228}$$

Yhtälö (228) esittää varaukseen vaikuttavan Lorentzin voiman sekä näkökulmasta, jossa varauksen katsotaan pysyvän levossa, että näkökulmasta jossa varauksen katsotaan liikkuvan kiinnitetyssä koordinaatistossa, ja tämä perustelee yhtälön (227).

Nyt yhtälöistä (226) ja (227) seuraa Maxwellin III yhtälö (208), siten että kyseisessä yhtälössä $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{B}$ ovat kuten ne havaitaan kiinnitetyssä koordinaatistossa (paikka $\mathbf{r}$ ei riipu ajasta t). Seuraa johtopäätös: Maxwellin III yhtälö on voimassa myös magneettikentässä liikkuvalle silmukalle.

Tähän liittyy aiempi huomautus, että Maxwellin III yhtälö ei itsessään kuvaa sähkömotorisen voiman indusoitumista, vaan ajan suhteen muuttuvan magneettikentän ja sähkökentän välistä yhteyttä. Nimittäin, tässäkään ei väitetä, että yhtälön kuvaama ilmiö selittäisi yksin sähkömotorisen voiman indusoitumisen yllä mainittuun silmukkaan.

Sähkömotorisen voiman indusoituminen silmukkaan on tässä seurausta myös Lorentzin voiman magneettikentän aiheuttamasta osasta.

Siis: koordinaatistossa, jossa silmukka C liikkuu nopeudella $\mathbf{v}$, silmukkaan indusoituu sähkömotorinen voima ε:

$$\varepsilon = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot) d\mathbf{l} \tag{229}$$

siten, että sähkökenttä $\mathbf{E}$ riippuu kunakin ajanhetkenä silmukan läpäisevän magneettikentän $\mathbf{B}$ muutoksesta Maxwellin III yhtälön (208) mukaisesti.

Yhteenvetona: muistetaan, että sähkömotorisen voiman, joka indusoituu silmukkaan silmukan liikkeestä magneettikentässä, saa aikaan magneettikentän aiheuttaman Lorentzin voiman vaikutus yhtälön (210) mukaisesti.

Lisäksi todettiin, että kentän, joka indusoi levossa olevaan silmukkaan sähkömotorisen voiman, täytyy olla sähkökenttä, ja Maxwellin III yhtälö (208) ja (209) osoittaa sähkökentän ja ajan suhteen muuttuvan magneettikentän välisen yhteyden.

Tässä yhtälö (229) kuvaa ilmiötä, jossa sähkömotorinen voima indusoituu kummallakin näistä tavoista, kun silmukka liikkuu magneettikentässä, ja kun lisäksi magneettikenttä muuttuu ajan suhteen koordinaatistossa, joka ei liiku silmukan mukana.

6 Johtopäätökset

Tämän diplomityön tavoite oli käsitellä kenttäteorian ja matematiikan yhteyttä ja havainnollistaa sitä, miten matematiikan ymmärtäminen voi edistää kenttäteorian oppimista. Työn perusteella yhteys kenttäteorian ja matematiikan välillä on ilmeinen, koska sen toisessa luvussa esitetyt matematiikan käsitteet kulkivat perustellusti mukana koko työn kenttäteoriaa esittelevän osion tukien sen sisältöä.

Jotta voidaan kommentoida erityisesti kysymystä matematiikan osaamisen merkityksestä kenttäteorian oppimiselle, on ensin palattava johdannossa esitettyyn työn rajaukseen. Sähkö- ja magneettikenttien käyttäytymistä selittävä teoria on valtavan laaja, minkä vuoksi työhön valikoitiin vain tietyt kenttäteorian käsitteet. Kenttäteoriasta kiinnostunut lukija onkin mahdollisesti jäänyt kaipaamaan joitakin peruskäsitteitä, jotka aihepiiriin tutustuttaessa tulevat yleensä nopeasti vastaan. Aiheen rajauksen ei kuitenkaan voida katsoa kumoavan työn tavoitteita, vaan tukevan niitä. Työn kenttäteoriaa selittävä osuus keskittyi lähinnä Maxwellin yhtälöihin, Lorentzin voimaan ja näihin suorassa yhteydessä oleviin peruskäsitteisiin, ja jo näiden, osittain kevytkin, käsittely riitti luomaan tarpeen ottaa käyttöön useita matemaattisia käsitteitä, jotka työn alkuosassa esiteltiin. Lisäksi on muistettava, että työssä tehtiin oletuksia lukijalla olevista matemaattisista taustatiedoista koskien erityisesti lineaarialgebraa sekä differentiaali- ja integraalilaskentaa, myös usean muuttujan suhteen. Selvästi matematiikan osaaminen on oleellista kenttäteorian oppimiselle. Osaamisella ei tässä tarkoiteta kykyä mekaanisesti suorittaa vaaditut matematiikanopinnot, vaan kyvyllä ymmärtää opetetun sisällön merkitys ja soveltaa sitä.

Jos nyt jossakin asiayhteydessä ei ole tarkoitus syventyä kenttäteoriaan yleisesti, vaan hyödyntää sitä tai siitä johdettuja tuloksia yksittäiseen tarkasti rajattuun käytännön sovellukseen, saattaa joissakin tapauksissa riittää, että käytössä on tietyt perustulokset. Lisäksi käytännön sovelluksissa yleisesti täytyy voida ottaa huomioon erilaisten materiaalien ja rakenteiden vaikutukset, jotka tässä työssä sivuutettiin. Muutenkaan työtä ei tehty tukemaan väitettä, että jokaisen siinä tai muualla käsitellyn todistuksen ymmärtäminen

olisi välttämätöntä kenttäteorian käyttämisen kannalta. Todistusten esittämisen tavoitteena oli havainnollistaa kenttäteorian käsitteiden välisiä yhteyksiä sekä korostaa matematiikan roolia kenttäteorian selittäjänä.

Tässä asiayhteydessä riittävän matematiikan osaamisen tarkoitetaan sisältävän sekä pitkältä ajalta kerätyt pohjatiedot ja hyvän laskurutiinin, että kenttäteoriassa suoranaisesti sovellettavan vektorianalyysin osaamisen. Tämä osaaminen paitsi yksinkertaistaa kenttäteorian ongelmien analysointia laskemalla ja simuloimalla, auttaa myös ymmärtämään, minkä tyyppisiä ilmiöitä kenttäteoriaa kuvaavien yhtälöiden takana on. Jos ymmärtää jonkin matemaattisen käsitteen yleisesti, sen hahmottaa myös silloin, kun se mainitaan sovelluksen yhteydessä. Jos taas tällaista ymmärrystä ei ole, joutuu jokaisen kenttäteorian ilmiön ja sen luonteen opettelemaan täysin uutena asiana. Kenttäteorian käsitteet ikään kuin vain ilmaantuvat jostakin, ja niiden sekä niiden välisten yhteyksien ja erojen hahmottaminen on vaikeaa, koska niitä kuvaava matematiikka ei avaudu oppijalle. Esimerkiksi Maxwellin yhtälöt ovat näennäisesti kompakteja, mutta sisältävät runsaasti informaatiota, mitä tässä työssä jossain määrin käsiteltiin.

Ihmiset luonnollisesti oppivat eri tavoilla, ja henkilöstä ja vaadittavasta oppimistasosta riippuen joillekin saattaa riittää, että on kokoelma kaavoja ja esimerkkejä käytettävänä. Esimerkkijohtoisessa oppimisessa vain saattaa käydä niin, että osaa ratkaista jonkin yksittäisen ongelman, mutta ei soveltaa saamaansa informaatiota toiseen vastaavaan ongelmaan. Uuden aihealueen oppiminen on tietenkin luontevaa aloittaa käyttäen esimerkkejä, ja toisaalta sähkön ja magnetismin luonteiden oppiminenkin yleensä aloitetaan kenttäteorian yleisemmistä tuloksista johdettuja erikoistapauksia kuvaavilla kaavoilla. Nyt kuitenkin tässä työssä eräänä oheistavoitteena oli rohkaista siihen, että ei liian pitkään opintojen edetessä etsittäisi helppoja ratkaisuja kuvitellen, että se aina parantaa oppimista, vaan hyväksyttäisiin, että voi ensin tuntua vaikealta syventyä kenttäteoriaan ja siinä tarvittavaan matematiikkaan, ja huomattaisiin oppimisesta tulevan palkitsevampaa ja kokonaisvaltaisempaa verrattuna siihen, että yritetään tehdä jokaisesta välivaiheesta heti ymmärrettävä. Matematiikan oppimista ja käyttöä voisi verrata vieraan kielen opiskeluun: siihen pitää tottua ja sitä pitää uskaltaa käyttää, vaikka ensin kokisi epäonnistuvansa.

Työssä käytetty lähdemateriaali valikoitui kenttäteoriaa käsittelevien kirjojen osalta sattumanvaraisesti. Kirjoitusprosessi itsessään lisäsi kunnioitusta ja arvostusta näiden teosten kirjoittajien työtä kohtaan. Kuten yllä mainittiin, aihealue on erittäin laaja. Lisäksi tällaisia teoksia tarvitaan sekä selittämään sähkö- ja magneettikenttien käyttäytymistä teoreettisesta näkökulmasta että käytännön sovelluksiin. Teosten vertailu keskenään olisi vaikeaa, koska niitä on kirjoitettu erilaisille kohderyhmille ja erilaisiin tarpeisiin. Todennäköisesti nämä kirjat olisivat vielä paljon laajempia kuin ovat, jos niiden kirjoittajat olisivat esittäneet kaiken osaamisensa ja jokaisen mahdollisen perustelun ja todistuksen jokaiselle esitetylle tulokselle. Jotakin on aina jätettävä pois, ja tässä työssä piti jättää erittäin paljon informaatiota pois. Työssä tehtiin pintapuolinen katsaus vektorianalyysiin ja kenttäteoriaan siinä toivossa, että se pieneltä osin voisi toimia jonkinlaisena siltana paitsi näiden aihealueiden välillä, myös kannustuksena niihin tutustumiseen.

Lähdeluettelo

Adams, R. & Essex, C. (2018). *Calculus: A Complete Course.* 9th Edition. Pearson Canada Inc.

Edminister, J. (1993). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Electromagnetics.* 2nd Edition. The McGraw-Hill Companies, Inc.

Griffiths, D. (2013). *Introduction to Electrodynamics.* 4th Edition. Pearson Education, Inc.

Hayt, W. & Buck, J. (2012). *Engineering Electromagnetics.* 8th Edition. The McGraw-Hill Companies, Inc.

Jackson, J. (1999). *Classical Electrodynamics.* 3rd Edition. John Wiley & Sons, Inc.

Moisio, M. (2025). *Usean muuttujan analyysi* [luentomoniste]. Vaasan yliopisto.

Purcell, E. & Morin, D. (2013). *Electricity and Magnetism.* 3rd Edition. Cambridge University Press.

Thidé, B. (2011). *Electromagnetic Field Theory.* 2nd Edition. Swedish Institute of Space Physics, Uppsala.

Young, H. & Freedman, R. (2020). *University Physics with Modern Physics.* 15th Edition. Pearson.

Liitteet

Liite 1. Ketjusäännöt

Liitteessä esitetään derivointisääntöjä yhdistetylle vektorifunktiolle perustuen lähteeseen Adams & Essex, 2018, s. 718.

Kun funktiolla $\mathbf{g} = (g_1, g_2, ..., g_n)$ on osittaisderivaatta $D_{x_i}\mathbf{g}$ pisteessä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ ja funktio f, jonka määrittelyjoukko on funktion $\mathbf{g}$ arvojoukko, on differentioituva pisteessä $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, niin yhdistetyllä funktiolla $(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x})$ on pisteessä $\mathbf{x}$ osittaisderivaatta muuttujan x_i suhteen:

$$D_{x_i}(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot D_{x_i}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{230}$$

Auki kirjoitettuna ketjusääntö (230) voidaan esittää seuraavasti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial g_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial f}{\partial g_n}\frac{\partial g_n}{\partial x_i} \tag{231}$$

Edelleen, kun funktiolla $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ on osittaisderivaatat jokaisen muuttujansa suhteen pisteessä $\mathbf{x}$, funktion $(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x})$ kokonaisderivaatta pisteessä $\mathbf{x}$ on:

$$D(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \cdot \mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{232}$$

jossa $\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})$ on $n \times k$ -kokoinen Jacobin matriisi, jonka sarakkeet ovat funktion $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ kaikki osittaisderivaatat (ja rivit funktion $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ komponenttifunktioiden gradientit). Funktion $(f \circ \mathbf{g})(\mathbf{x})$ kokonaisderivaatta on k alkiota sisältävä vektori.

Olkoon funktio $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$, jonka komponenttifunktiot on määritelty samoin kuin edellä funktio f, ja funktio $\mathbf{g}$ on kuten edellä. Tällöin yhdistetyllä funktiolla $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x})$ on pisteessä $\mathbf{x}$ kokonaisderivaatta:

$$\mathrm{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{233}$$

Tässä $\mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ on $m \times n$ -kokoinen Jacobin matriisi riveinään funktion $\mathbf{f}$ komponenttifunktioiden gradientit ja sarakkeinaan funktion $\mathbf{f}$ osittaisderivaatat jokaisen funktion $\mathbf{g}$ komponenttifunktion suhteen. $\mathrm{D}\mathbf{g}(\mathbf{x})$ on kuten yllä kaavan (232) yhteydessä.

$\mathrm{D}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x})$ on $m \times k$ -kokoinen Jacobin matriisi, jonka sarakkeet ovat yhdistetyn funktion $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x})$ kaikki osittaisderivaatat jokaisen muuttujan $x_1, x_2 ... x_k$ suhteen. Niinpä, jos tarvitaan vain jokin näistä osittaisderivaatoista, riittää seuraava kaava:

$$D_{x_i}(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathrm{D}\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))D_{x_i}\mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{234}$$

jossa $D_{x_i}\mathbf{g}(\mathbf{x})$ tulee esittää pystyvektorina, jotta tulo on määritelty.

Kaavan (234) käyttämistä vastaa ketjusäännön I (230) käyttäminen jokaiselle funktion $\mathbf{f}$ komponenttifunktiolle siten, että komponenttifunktioiden osittaisderivaatat muuttujan x_i suhteen kootaan (pysty)vektoriksi.

Liite 2. Koordinaattijärjestelmien muuttujien välisiä riippuvuuksia

Sylinterikoordinaatiston muuttujien ρ, φ ja z sekä karteesisen koordinaatiston muuttujien x, y ja z välisiä riippuvuuksia, kun $(x, y, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$, ovat:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ ja } \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{235}$$

Pallokoordinaatiston muuttujien r, θ ja φ sekä karteesisen koordinaatiston muuttujien x, y ja z välisiä riippuvuuksia, kun $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$, ovat:

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \text{ ja } \sin\theta\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{236}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ ja } \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{237}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \text{ ja } \cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{238}$$

Jos sylinteri- tai pallokoordinaatiston origo ei ole asetettu xyz-koordinaatiston origoon, vaan yleisemmin pisteeseen (x_0, y_0, z_0), yllä oleviin kaavoihin tehdään sijoitukset: $x \to x - x_0$, $y \to y - y_0$, ja $z \to z - z_0$. Tällöin nimittäin muuttujienvaihdossa sylinterikoordinaatteihin $(x, y, z) = (\rho\cos\varphi + x_0, \rho\sin\varphi + y_0, z + z_0)$, ja muuttujienvaihdossa pallokoordinaatteihin $(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi + x_0, r\sin\theta\sin\varphi + y_0, r\cos\theta + z_0)$.

Sylinterikoordinaatiston lokaalin kannan vektorit ovat:

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\varphi\,\mathbf{j} \tag{239}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j} \tag{240}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{k} \tag{241}$$

Pallokoordinaatiston lokaalin kannan vektorit ovat:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k} \tag{242}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k} \tag{243}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j} \tag{244}$$

Myös lokaalien kantojen vektorien komponenttifunktioita koskee aiempi huomautus tilanteesta, jossa sylinteri- tai pallokoordinaatiston origo sijaitsee muualla kuin karteesisen koordinaatiston origossa.

Sylinterikoordinaatiston lokaalin kannan vektorien osittaisderivaatat muuttujien ρ, φ ja z suhteen ovat:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho = \mathbf{0},\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\varphi,\ \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_\rho = \mathbf{0} \tag{245}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{0},\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\hat{\mathbf{e}}_\rho,\ \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{0} \tag{246}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0},\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0},\ \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0} \tag{247}$$

Pallokoordinaatiston lokaalin kannan vektorien osittaisderivaatat muuttujien r, θ ja φ suhteen ovat:

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{0},\ \frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\theta,\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_r = \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{248}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_\theta = \mathbf{0},\ \frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\hat{\mathbf{e}}_r,\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\theta = \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{249}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{0},\ \frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \mathbf{0},\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r - \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \tag{250}$$

Liite 3. Tasaisen äärettömän tasovarausjakauman aiheuttama sähkökentän voimakkuus

Sähkökentän voimakkuus $\mathbf{E}$ tasaisen pintavaraustiheydestä σ riippuvan tasovarausjakauman aiheuttamana, todistus ilman Gaussin lakia. (Edminister, 1993, s. 23-24.)

Asetetaan ääretön tasainen tasovaraus tasolle $z = 0$. Tasovarauksen varausalkion $dQ = \sigma dxdy$, jonka sijainti on $(x_0, y_0, 0)$, pisteeseen $P = (x, y, z)$ aiheuttama sähkökentän differentiaalinen alkio $d\mathbf{E}$ on:

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\|(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + z\mathbf{k}\|^3} \\ &= \frac{\sigma dxdy}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{251}$$

Pisteeseen P kohdistuva tasovarauksen aiheuttama sähkökenttä $\mathbf{E}$ saadaan integroimalla ylläolevaa yhtälöä tason $z = 0$ yli. Tätä ennen tehdään muuttujienvaihto $\mathbf{r}$ sylinterikoordinaatistoon, jonka origo sijaitsee pisteessä $(x_0, y_0, 0)$. Tässä muuttujienvaihdossa siis $(x, y, z) = \mathbf{r}(\rho, \varphi, z) = (\rho\cos\varphi + x_0, \rho\sin\varphi + y_0, z)$, jolloin $\|\mathbf{r}_\rho \times \mathbf{r}_\varphi\| = \rho$ ja siten $dxdy = \rho\, d\rho d\varphi$. Lisäksi $\varphi \in [0, 2\pi[$, ja $\rho \in [0, \infty[$.

Nyt tasovarauksen aiheuttama sähkökenttä pisteessä P on:

$$\mathbf{E} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sigma\rho\, d\rho d\varphi}{4\pi\varepsilon_0(\rho^2 + z^2)^{3/2}} (\rho\cos\varphi\mathbf{i} + \rho\sin\varphi\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \tag{252}$$

Sähkökentän voimakkuuden $\mathbf{E}$ kantavektorien $\mathbf{i}$ ja $\mathbf{j}$ suuntaiset komponentit saavat arvon 0, koska muuttujan φ suhteen 2π-jaksollisia funktioita integroidaan jakson mittaisen välin yli.

Tässä siis kenttäviivojen radiaaliset, koordinaateista x ja y riippuvat komponentit kumoavat toisensa. Jokaista sähkökentän elementtiä $d\mathbf{E}$ kohti nimittäin on vastakkainen $d\mathbf{E}$ niin, että kun ensin mainitun aiheuttaa tasovarauksen pisteessä $(x, y, 0)$ sijaitseva varauselementti, jälkimmäisen aiheuttaa pisteessä $(-x, -y, 0)$ sijaiseva varauselementti.

Edelleen seuraa:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \lim_{R\to\infty} \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} \Big|_{\rho=0}^{R} \frac{-\sigma\varphi z}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\rho^2+z^2}}\mathbf{k} \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-\sigma z}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{-\sigma z}{2\varepsilon_0\sqrt{0^2+z^2}}\right)\mathbf{k} \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{k}\end{aligned} \tag{253}$$

Siis: tasovarauksen σ, joka sijaitsee tasolla $z = 0$, aiheuttama sähkökentän voimakkuus alueessa $z > 0$ on $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{k}$. Alueeseen $z < 0$ aiheutuu sähkökenttä $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\mathbf{k})$.

Vektorit $\mathbf{k}$ ja $-\mathbf{k}$ ovat tason $z = 0$ yksikkönormaalivektorit. Yleisesti siis tasolla, jonka yksikkönormaali on $\mathbf{n}$, sijaitseva tasovaraus aiheuttaa sähkökentän voimakkuuden:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n} \tag{254}$$

jossa $\mathbf{n}$ on kyseisen varausjakauman sisältävän tason yksikkönormaali sen kummallakin puolen. Kuten tuloksesta nähdään, kentän voimakkuus ei riipu valitusta pisteestä.

Liite 4. Pistemäisen lähteen aiheuttaman vektorikentän divergenssi

Liite perustuu lähteeseen Griffiths, 2013, s. 45-50.

Olkoon vektorifunktio $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3$, jossa $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ja $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$, ja $\hat{\mathbf{e}}_r$ on $\mathbf{r}_0$-keskisen pallokoordinaatiston lokaalin kannan vektori:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} = \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \tag{255}$$

Määritetään vektorikentän $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ divergenssi kaikissa pisteissä $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ käyttäen kaavaa (81):

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{1}{r^2}\Big) = 0 \tag{256}$$

Lasketaan sitten kentän $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vuo $\Phi_{\mathbf{v}}$ läpi origokeskisen (origon siis sijaitessa pisteessä $\mathbf{r}_0$) R-säteisen pallon pinnan S:

$$\Phi_{\mathbf{v}} = \oiint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \oiint \frac{1}{R^2}\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{R^2} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi \tag{257}$$

Nyt divergenssilauseen (20) ja yhtälön (257) nojalla, kun V on pinnan S rajaama $\mathbf{r}_0-$keskinen pallo, seuraa:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{v}\, dV = 4\pi \tag{258}$$

Yhtälöitä (256) ja (258) vertaamalla nähdään, että vektorikentällä $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ on oltava lähde origossa eli pisteessä $\mathbf{r}_0$, ja vain tässä pisteessä. Divergenssillä $\nabla \cdot \mathbf{v}$ on siis oltava integrointimassa, joka sijaitsee vain pisteessä $\mathbf{r}_0$, ja integrointimassan suuruus on 4π. Niinpä:

$$\iiint_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}\, dV = 4\pi, \text{ kun } \mathbf{r}_0 \in V \tag{259}$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}\, dV = 0, \text{ kun } \mathbf{r}_0 \notin V \tag{260}$$

Divergenssilauseen nojalla tulos pätee pallon lisäksi myös yleisemmille pinnoille. Tämä voidaan perustella siten, että pallo ympäröidään jollakin mielivaltaisella pinnalla siten, että vektorikentän $\mathbf{v}$ lähde $\nabla \cdot \mathbf{v}$ on pallon sisällä. Nyt, koska koska kentän vuo pallopinnan läpi sisäänpäin on -4π, ja koska toisaalta mielivaltaisen pinnan ja pallopinnan välisessä tilavuudessa ei ole lähteitä ja siten divergenssilauseen nojalla kokonaisvuo tämän tilavuuden ympäröivän pinnan läpi on 0, on vuo tällöin mielivaltaisesta pinnasta ulospäin $0 - (-4\pi) = 4\pi$ ja siis sama kuin pallopinnasta ulospäin.

Koska vektorikentän lähde on yksittäisessä pisteessä, ja silti sillä on äärellinen integrointimassa, divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{v}$ esitetään distribuutiona:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 4\pi\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0) \tag{261}$$

jossa δ-distribuutiolla $\delta(t)$ on seuraavat ominaisuudet:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \text{ kun } t \neq 0 \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0) \text{ kaikille pisteessä } t = 0 \text{ sileille funktioille } f(t) \end{cases} . \tag{262}$$

Siis, δ-distribuutiolla $\delta(t)$ on integrointimassa, jonka suuruus on 1 ja joka sijaitsee kokonaan pisteessä $t = 0$.

Liite 5. Taulukko vektorikenttien differentiaalioperaattorien identiteeteistä

Riittävän monta kertaa derivoituville skalaarifunktioille ϕ ja ψ ja vektorifunktioille $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{G}$ pätevät seuraavat tulokset (Adams & Essex, 2018, s. 923.):

(a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

(b) $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})$

(c) $\nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F})$

(d) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

(e) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$

(f) $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F}$

(g) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (roottorin divergenssi on nolla)

(h) $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$ (gradientin roottori on nollavektori)

(i) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

Tässä ∇^2 on Laplacen operaattori vektoreille, ja $(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} = \left(F_1\frac{\partial}{\partial x} + F_2\frac{\partial}{\partial y} + F_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{G}$

Liite 6. Materiaaliderivaatta

Tässä esitetään kokonaisderivaatan johtaminen funktiolle, joka on riippuvainen ajasta ja ajan suhteen muuttuvasta paikasta, ja joka derivoidaan ajan suhteen:

Olkoon ajan t ja ajasta t riippuvan sijainnin $\mathbf{r}(t)$ suhteen muuttuva, derivoituva funktio f siten, että

$$f(t, \mathbf{r}(t)) = f(t, x(t), y(t), z(t)) \tag{263}$$

jolle voidaan esittää paikan $\mathbf{r}(t)$ muutos ajan suhteen nopeutena $\mathbf{v}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t) = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t) \tag{264}$$

Tällöin ketjusäännön (230) nojalla:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \end{aligned} \tag{265}$$

Sovelletaan tulosta vektorikentän $\mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t)) = f_1(t, \mathbf{r}(t))\mathbf{i} + f_2(t, \mathbf{r}(t))\mathbf{j} + f_3(t, \mathbf{r}(t))\mathbf{k}$, jossa f_1, f_2 ja f_3 ovat kuten yllä määritelty funktio f, jokaiselle komponenttifunktiolle:

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{df_1}{dt} + \frac{df_2}{dt} + \frac{df_3}{dt} \tag{266}$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_2 + \frac{\partial f_3}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_3$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_3}{\partial t} + v_1\big(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x}\big) + v_2\big(\frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial y}\big) + v_3\big(\frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_3}{\partial z}\big)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + v_1\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + v_2\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + v_3\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \big(v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y} + v_3\frac{\partial}{\partial z}\big)\mathbf{f}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{f} \tag{267}$$

Näin siis saadaan vektorifunktiolle $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t), t)$ kokonaisderivaatta ajan suhteen:

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{f} \tag{268}$$

Tässä termi $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$ kuvaa funktion $\mathbf{f}$ muutosta ajan suhteen lokaalisti siten, että sijaintia $\mathbf{r}(t)$ pidetään vakiona ajan suhteen, ja termi $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{f}$ kuvaa funktion muutosta ajan mukana muuttuvan paikan suhteen.