Joonas Hampinen

Tuottojen laskentatapojen erot tehokkaalla rintamalla

Taloustieteen ja
talousoikeuden akateeminen
yksikkö
Taloustiede, Pro Gradu-
tutkielma
Taloustieteen maisteriohjelma

Vaasa 2023

VAASAN YLIOPISTO
Taloustieteen ja talousoikeuden akateeminen yksikkö
Tekijä: Joonas Hampinen
Tutkielman nimi: Tuottojen laskentatapojen erot tehokkaalla rintamalla
Tutkinto: Kauppatieteiden maisteri
Oppiaine: Taloustiede
Työn ohjaaja: Petri Kuosmanen
Valmistumisvuosi: 2023 **Sivumäärä:** 59

TIIVISTELMÄ:
Tässä tutkimuksessa pyritään löytämään ratkaisu siihen, kuinka paljon tehokkaaseen rintamaan vaikuttaa tuottojen laskentatapa. Tuottoja lasketaan yleisesti ottaen kahdella eri tavalla: absoluuttisina ja logaritmisina tuottoina. Lisäksi tuottoja voidaan laskea eri mittaisilta periodeilta, useimmiten kuukausittaisilta tai vuosittaisilta periodeilta. Tässä tutkimuksessa hyödynnetään näitä eri tavoin ja eri periodeilta laskettuja tuottoja selvittämään modernin portfolioteorian viitekehyksessä tehokkaiden rintamien käyttäytymistä, kun tuottojen laskentatavat muuttuvat.

Tutkimuksen viitekehyksenä käytetään modernia portfolioteoriaa, jonka Harry Markowitz esitteli alun perin jo vuonna 1952. Modernin portfolioteorian yhtenä tärkeimmistä saavutuksista oli hajauttamisen esitteleminen tieteellisessä muodossa. Käytännössä tämä tarkoittaa tehokasta rintamaa, joukkoa portfolioita, jotka ovat kukin riskin ja tuoton suhteen mahdollisimman tehokkaita. Tämä tutkimus osoittaa, kuinka absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen käyttö kuukauden ja vuoden mittaisilla periodeilla vaikuttaa tehokkaisiin rintamiin ja tehokkaiden rintamien portfolioiden ihannepainotuksiin.

Absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen teoria selittää, että tuottojen laskentatavoilla on eroa. Erot ovat vähäisiä lyhyillä, kuten päivänmittaisilla periodeilla, mutta kasvavat, kun periodien mitta kasvaa esimerkiksi vuoden mittaiseksi. Tuottoja käytetään usein eri tutkimuksissa ilman, että niiden eroja selvennetään lukijalle. Absoluuttiset tuotot ovat yleisesti ottaen yksinkertaisempia ymmärtää, mutta usean periodin tarkastelussa niiden laskeminen yhteen aiheuttaa virheellisiä tuloksia. Logaritmiset tuotot puolestaan ovat usein rahoitusmaailmassa käytössä, koska usean periodin tarkastelu on näillä helpompaa, siitä huolimatta että ne eivät ole niin helposti ymmärrettävissä.

Tutkimustulokset kertovat, että käytettäessä kuukausituottoja logaritmisten ja absoluuttisten tuottojen ero tehokkaassa rintamassa on huomattavasti pienempi, kuin vertailtaessa vuosittaisia tuottoja. Tulokset indikoivat, että mitä pidempi on periodi, sitä suuremmat ovat vaihtelut lasketuissa tuotoissa, ja täten sitä suuremmat ovat erot tehokkaissa rintamissa.

AVAINSANAT: moderni portfolioteoria, tehokas rintama, absoluuttiset tuotot, logaritmiset tuotot

Sisällys

Kuvat

Taulukot

1. Johdanto

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, minkälaisia eroja absoluuttisilla ja logaritmisilla tuotoilla, sekä niiden käyttäytymisellä on osana modernin portfolioteorian tehokasta rintamaa. Moderni portfolioteoria on yksi aikamme kuuluisimmista sijoittamisen viitekehyksistä, jolla on ollut huomattava vaikutus esimerkiksi hajauttamisen etujen tuomisesta yleiseen tietoisuuteen.

Absoluuttisia ja logaritmisia tuottoja on tyypillisesti tarkasteltu toisistaan erillisinä, ja useimmiten taloustieteellisissä tutkimuksissa käytetään ainoastaan toista. Tämä voi aiheuttaa ristiriitaisia, tai vaikeasti tulkittavissa olevia tutkimustuloksia. Tämän tutkimuksen päämääränä on löytää vastaus seuraavaan ongelmaan: vaikuttaako tuottojen laskentatapa tehokkaaseen rintamaan, ja sen esittämiin tehokkaisiin portfolioihin?

Tutkimuksessa yhdistetään kaksi osa-aluetta, joista ensimmäinen moderni portfolioteoria on yksi taloustieteen kivijaloista. Modernin portfolioteorian tarjoamaan viitekehykseen yhdistetään laskentatapojen erilaisuus, ja tutkitaan, kuinka tehokas rintama muuttuu, kun kaikki muut asiat paitsi tuottojen laskentatapa pysyy ennallaan. Tutkimuksessa myös osoitetaan, minkä takia erityisesti pitkällä aikavälillä tuottojen laskentatavan valinnalla on selvä vaikutus johdettuihin tehokkaisiin rintamiin. Sijoittaja, joka hyödyntää tehokasta rintamaa oman portfolionsa muodostamiseen voi hyötyä tutkimustuloksesta merkittävästi, saaden lisäinformaatiota yksinkertaisesti muuttamalla portfolionsa tuottojen laskentatapaa.

Tutkimuksen datana hyödynnetään seuraavia osakeindeksejä ympäri maailman: FTSE 100, joka on Lontoon pörssin suurimpien pörssiyhtiöiden muodostama indeksi. Yhdysvaltojen 500 suurimman yrityksen osakeindeksi S&P 500. Nikkei 225, joka koostuu Tokion pörssin 225 suurimmasta pörssiyhtiöstä. Euroopasta mukana on lisäksi DAX 30 osakeindeksi, joka koostuu 30 suuresta Frankfurtin pörssin pörssiyhtiöistä. Data on kerätty ajallisesti tammikuusta 1990 huhtikuuhun 2023 Yahoo Finance-verkkosivustolta.

Data on valittu siten, että se edustaisi suhteellisen kattavasti maailman suurimpia markkina-alueita. Tärkeimpänä syynä maantieteellisen hajautuksen lisäksi on ollut datan helppo pitkän aikavälin saatavuus, ja datan laatu.

Tutkimuksen empiirinen osio on toteutettu avoimen lähdekoodin R-ohjelmointikielellä, se on ilmaiseksi ladattavissa internetistä. R-ohjelmointikieltä käytetään yleisesti taloustieteessä, ekonometriassa, sekä rahoituksessa, ja se sisältää suuren määrän erilaisia valmiita kirjastoja, joita voi mainituissa aiheissa hyödyntää. Näistä syistä johtuen R soveltuu erinomaisesti taloustieteellisen tutkimuksen, sekä data-analyysin tekemiseen. Tutkimuksessa on hyödynnetty vapaasti saatavilla olevaa fPortfolio-kirjastoa, jonka voi ladata R-ohjelmointikielelle. fPortfolioon on luotu suuri määrä erilaisia valmiita funktioita portfolion tärkeiden tunnuslukujen laskemiseksi, tehokkaan rintaman rajoitteiden asettamiseksi, sekä siistien graafien luomiseksi.

Tämä tutkimus rakentuu seuraavasti: Ensimmäiseksi esitellään absoluuttiset ja logaritmiset tuotot, ja teoria niiden taustalla. Samassa yhteydessä käydään läpi aihetta käsitteleviä tutkimuksia. Toisena on katsaus moderniin portfolioteoriaan, ja sen pääteeseihin. Lisäksi käydään läpi empiirisen tutkimuksen kannalta tärkeät modernin portfolion seikat, kuten Sharpe-luku, joka on osa myöhemmin modernin portfolioteorian pohjalta kehitettyä Capital Asset Pricing-mallia. Kolmas osa on tämän tutkimuksen empiirinen osio, jossa johdetaan tehokkaat rintamat, ja kyseisten tehokkaiden rintamien portfolioiden painotukset, sekä painotetut tuotot. Viimeiseksi tutkimus, ja sen tulokset käydään läpi yhteenvedon muodossa.

2. Absoluuttiset ja logaritmiset tuotot

Rahoitusmaailmassa tuotot, sekä tappiot mitataan tyypillisesti prosentteina alkuperäisen sijoituksen suhteen. Tuottoja voidaan mitata absoluuttisina tuottoina, tai logaritmisina tuottoina. Niitä käytetään ajoittain ristiin, joka voi aiheuttaa huomattavan suuria ongelmia tutkimusten lopputuloksissa. Absoluuttisia tuottoja käytetään useimmiten keskustellessa lyhyen aikavälin sijoituksista. Myös vertailtaessa kahden eri sijoituksen tuottoja lyhyellä aikavälillä absoluuttisten tuottojen käyttäminen on yleistä, sillä yleisesti ottaen ne ovat helpompi sekä laskea että ymmärtää. Logaritmisia tuottoja puolestaan hyödynnetään usein pidemmän aikavälin sijoitusten vertailussa puhuttaessa esimerkiksi osakkeista tai rahastoista. Tämä johtuu siitä, että vertailu eri aikaperiodien välillä on helpompaa, ja lisäksi niillä on tilastollista laskentaa ajatellen hyviä ominaisuuksia, kuten oletus normaalijakaumasta.

Puhtaasti absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen eroihin keskittyneitä tutkimuksia on tämän hetkisessä tutkimuskirjallisuudessa melko rajoitetusti saatavilla. Useimmissa tutkimuksissa keskitytään tutkimaan erillistä aihetta, jossa tuottojen laskentatapaa ei välttämättä nähdä kriittisenä seikkana tutkimuksen onnistumiselle. Tämän takia useimmat tutkimukset käyttävät jompaakumpaa. On myös yleistä, että tuottojen laskentatapaa ei tutkimuksissa selvitetä lukijalle.

Tuoton laskentatavan valinnassa sijoittajan tai tutkijan tulee pohtia omia tarpeitaan. Mikäli tuottoja tutkitaan usean periodin ajalta, tai niitä käytetään matemaattiseen mallintamiseen sekä analyysiin, logaritmiset tuotot voivat olla sopivampi lähtökohta. Toisaalta, jos sijoittaja haluaa yksinkertaisesti tietää sijoituksensa prosentuaalisen kasvun yhden periodin ajalla, absoluuttiset tuotot voivat olla parempi valinta.

2.1. Tuotot matemaattisesti

Absoluuttiset tuotot ovat sijoituksen prosentuaalinen kasvu tai lasku tietyllä periodilla verrattuna sen alkuperäiseen arvoon. Logaritmiset tuotot puolestaan ovat sijoituksen loppuarvon ja alkuperäisen arvon suhde, josta on otettu luonnollinen logaritmi. Lopputulos on prosentuaalinen.

Absoluuttinen tuotto lasketaan kaavan 1 mukaisesti.

$$R_t = \frac{(P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \tag{1}$$

Missä P_t on arvopaperin hinta ajanhetkellä t. Osoittaja $(P_t - P_{t-1})$ on arvopaperin omistusajan tuotto, negatiivinen tuotto puolestaan on tappiota. Osoittaja P_{t-1} on alkuperäisen investoinnin määrä omistuksen alkamisesta lähtien. Tämän takia absoluuttinen tuotto voidaan nähdä myös suhteellisena tuottoasteena.

Usean periodin absoluuttinen tuotto

$$r_T = \frac{P_T}{P_0} - 1 = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \ldots \times \frac{P_1}{P_0} - 1 = \prod_{t=1}^{T} \frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{2}$$

Useamman periodin absoluuttisten tuottojen laskeminen vaatii yksittäisten periodien tuottojen kertomista keskenään.

Yhden periodin logaritminen tuotto

$$r_T = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \tag{3}$$

missä $r_t = \log\,(P_t)$ kutsutaan logaritmiseksi hinnaksi, ja $r_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$ vastaa arvopapereiden logaritmisten tuottojen eroa ajanhetkellä t. Koska tuotot ovat pienempiä lyhyellä aikavälillä, absoluuttiset ja logaritmiset tuotot ovat todennäköisesti toisiaan lähellä kun puhutaan päiväkohtaisista tuotoista. Mitä pidemmäksi periodin pituus kasvaa, sitä todennäköisempää on, että tuotot ovat selvästi erilaiset.

Usean periodin logaritminen tuotto

$$r_T = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) + \cdots + \log\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = r_t + r_{t-1} + \cdots + r_1 = \sum_{t=1}^{T} r_t \qquad (4)$$

Kaava 4 osoittaa, että usean periodin logaritminen tuotto on yksinkertaisesti yksittäisten periodien logaritmisten tuottojen summa.

Portfolion absoluuttinen tuotto

$$R_{t,P} = w_1 R_{t,1} + \cdots + w_n L_{t,n} \qquad (5)$$

Absoluuttisen ja logaritmisen tuoton ero on kerätty alla olevaan taulukkoon (mukaillen: Hampinen 2020). Arvopaperin hinta ajanhetkellä t = 100 €. Vuoteen t + 1 sen hinta nousee 20 euroa, jolloin absoluuttinen tuotto on 20 %. Arvopaperin arvo laskee vuonna t + 2 takaisin sadan euron arvoiseksi. Tällöin arvopaperin hinta laskee absoluuttisen tuoton mukaisesti 16,67 %. Tästä seuraa, että kahden vuoden annualisoitu vuosituotto on täten 1,665 % (3,33 % / 2), vaikka arvopaperin reaalihinta ei ole muuttunut lainkaan. Logaritmisten tuottojen tapauksessa edellisestä ongelmasta päästään eroon, mutta prosentuaalinen tuotto on hieman pienempi, kuin mitä se todellisuudessa on. Kun laskettu logaritminen tuotto korotetaan (kaava 6) mukaisesti Eulerin vakion potenssiin, saadaan todellinen tuotto näkyville.

$$R_t = \mathcal{E}^{r_t} - 1 \quad (6)$$

missä Ɛ = Eulerin vakio (~2,718282)

Taulukko 1. Absoluuttiset ja logaritmiset tuotot havainnollistettuna.

VUOSI	REAALIOMISTUS	ABSOLUUTTINEN TUOTTO	LOGARITMINEN TUOTTO	$R_t = \mathcal{E}^{r_t} - 1$
t	100	0 %	0 %	0 %
1	120	20 %	18,23216 %	20 %
2	100	-16,67 %	-18,23216 %	-16,67 %
YHTEENSÄ	0	3,33 %	0 %	0 %

2.2. Erot tuottojen välillä

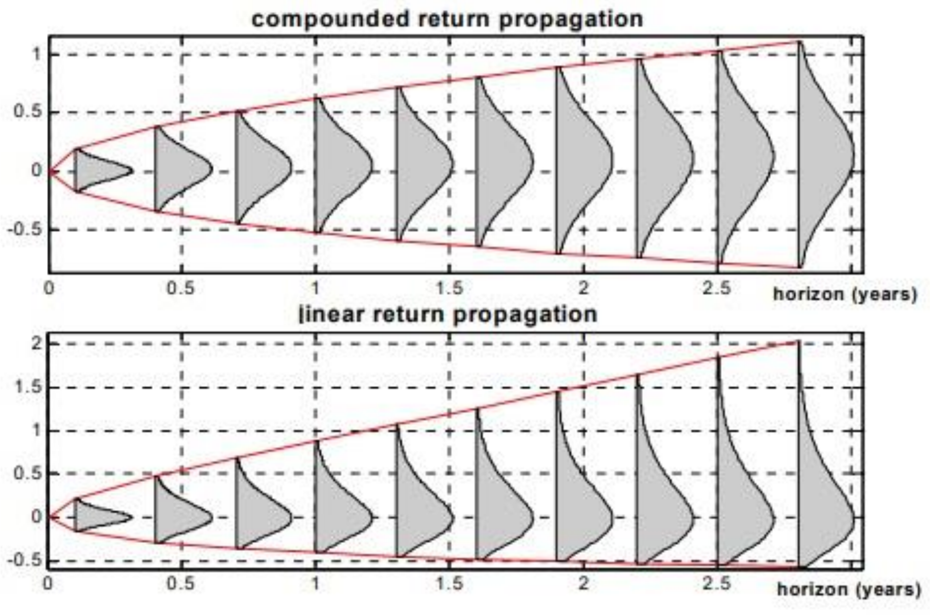
Hudson ja Gregoriou (2014) kertovat, että tutkimuksissa absoluuttisia ja logaritmisia tuottoja käytetään vaihtelevasti, vaikka molempien käyttäminen voisi parantaa tutkimustulosten tarkkuutta. Erityisesti nykyään tietokoneita hyödyntämällä, tuottojen laskeminen on triviaali tehtävä, ja se voisi tuoda todellista lisäarvoa tutkimuksiin. Tutkimuskirjallisuudessa on esitetty myös muita vaihtoehtoja, esimerkiksi Ultsch (2009) esittää vaihtoehtoista mallia, jota hän kutsuu suhteellisiksi eroiksi (relative differences). Rahoitusmaailman tutkimuksessa on kuitenkin tyypillisesti suosittu absoluuttisia ja logaritmisia tuottoja muiden vaihtoehtojen sijaan.

Erityisesti rahoitusmaailmassa logaritmisten tuottojen käyttäminen on erittäin yleistä. Syynä tälle on esimerkiksi se, että logaritmiset tuotot ovat ”lisääntyviä” (additive). Tämä tarkoittaa sitä, että tuotot voidaan lisätä yhteen, jolloin saadaan laskettua helposti esimerkiksi portfolion kumulatiivinen tuotto. Myös Miskolczi (2017) toteaa, että logaritmisten tuottojen etuna absoluuttisiin tuottoihin verrattuna on se, että usean periodin logaritminen tuotto voidaan laskea yhden periodin logaritmisten tuottojen summana. Toisena, logaritmiset tuotot huomioivat ”kertyneet” tuotot (compounding returns). Toisin sanoen logaritmiset tuotot kokonaistuvat yli ajan (kaava 3). Tämä on tärkeää erityisesti pitkällä aikavälillä todellista tuottoa laskettaessa. Kolmantena, logaritminen tuotto on normaalijakauma, kuten kuvasta 1 nähdään. Tämän ansiosta se sopii monenlaisiin stokastisiin hinnoittelumalleihin paremmin.

Meucci (2010) mainitsee, että absoluuttisten tuottojen positiivisena puolena voidaan nähdä se, että ne kokonaistuvat ”arvopaperien yli”. Tämä tarkoittaa sitä, että usean periodin absoluuttiset tuotot ovat yksittäisten periodien tulo. Se voi aiheuttaa laskennallisia ongelmia arvoille, jotka ovat lähellä nollaa. Matemaattisesti tämä tarkoittaa sitä, että usean arvopaperin yhteenlaskettu absoluuttinen tuotto voidaan laskea laskemalla portfolion tuotto. Tämä tapahtuu laskemalla portfolioon kuuluvien arvopapereiden painojen $w_1,\ldots,w_n$ ja arvopapereiden absoluuttisten tuottojen $R_{t,1},\ldots,$ $R_{t,n}$ painotettu keskiarvo (kaava 2). Lisäksi, mikäli tuoton kasvua mitataan vain yhden periodin ajalta, absoluuttinen tuotto antaa tarkan ja oikean kuvan arvopaperin tuotosta.

Absoluuttisia tuottoja tarkastellessa on huomattava, että positiiviset tuotot kasvavat suuremmiksi ajan kuluessa. Kuva 1 havainnollistaa tuottojen kasvavaa eroa, kun sijoitushorisontti pitenee. Ylempi graafi kuvaa logaritmisten tuottojen kasvua ajan suhteen, ja se seuraa neliöjuurisääntöä. Keskiarvo, ja varianssi kasvavat lineaarisesti horisontin kanssa, ja volatiliteetti kasvaa aikahorisontin neliöjuuren suhteen. Alempi graafi puolestaan kuvaa absoluuttisten tuottojen vääristynyttä kasvua aikasarjassa.

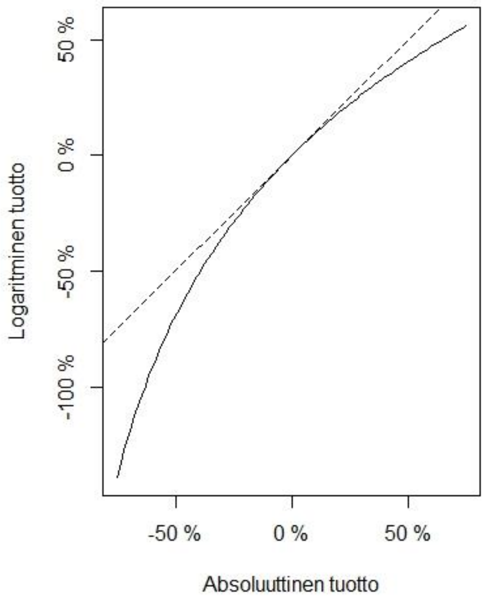
Ultsch (2009) kertoo, että rahoitusteoriat kuten Markowitzin portfolioteoria (1952) on rakennettu sillä oletuksella, että tuotot ovat normaalijakautuneet. On kuitenkin tiedossa, että todelliset mitatut markkinatuotot eivät seuraa näitä jakaumia. Absoluuttiset ja logaritmiset tuotot kärsivät molemmat hänen mukaansa myös epäsymmetrisyydestä, ja rajattomasta (unbound) vaihteluvälistä. Rajaton vaihteluväli tarkoittaa, että kokonaistappio rajoittuu absoluuttisilla tuotoilla 100 prosenttiin. Positiiviset luvut voivat kuitenkin olla esimerkiksi yli 500 prosenttia. Logaritmisilla tuotoilla tilanne on hänen mukaansa vielä huonompi, sillä tämän päivän hinnan ollessa lähellä nollaa, logaritminen tuotto on numeerisesti epävakaa äärettömyyttä kohti. Tästä seuraa, että tuottoja ja tappioita tulee kuvata eri tavalla.



Kuva 1. Tuottojen kasvava ero periodin pidentyessä

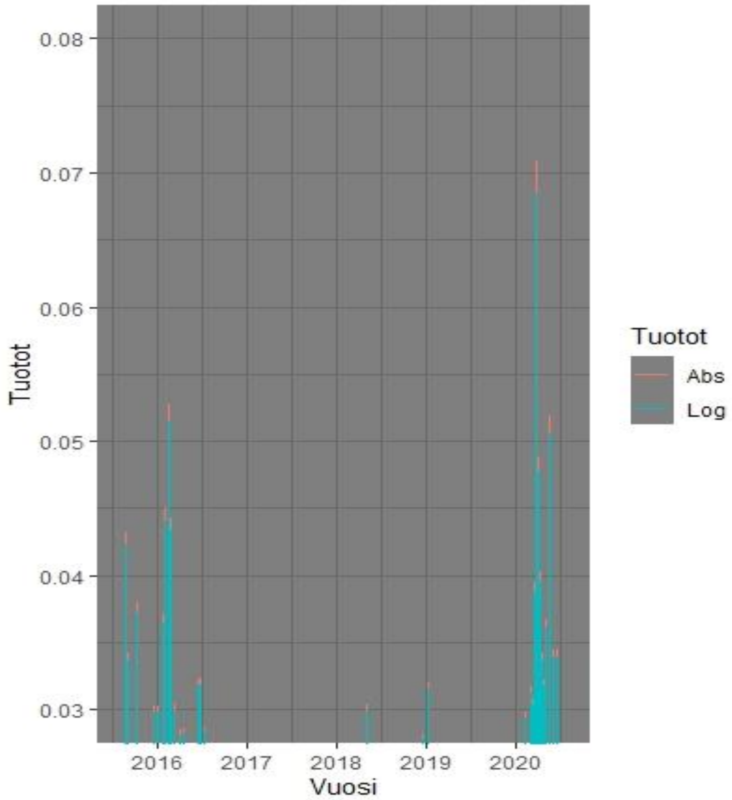
Hudson & Gregoriou (2014) kertovat, että absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen välillä on eroa, kun vertaillaan laskettuja keskituottoja. Teoreettisten todistusten mukaan logaritmisten tuottojen keskiarvot ovat pienempiä kuin absoluuttisten tuottojen keskiarvot. Eron suuruus riippuu heidän mukaansa tuottojen varianssista, ja varianssin suuruus on suhteellisen muuttumaton riippumatta siitä, kumpia tuottoja käytetään. Tästä seuraa, että keskimääräisten absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen välillä ei ole yksi-yhteen suhdetta. Miskolzi (2017) puolestaan kirjoittaa, että absoluuttinen ja logaritminen tuotto ovat keskenään vertailukelpoisia. Hudson ja Gregoriou (2014) eivät poissulje keskimääräisten tuottojen vertailukelpoisuutta, vaikka niillä ei ole yksi-yhteen suhdetta. Se, minkälainen suhde tuottojen välillä on, ja ovatko tuotot vertailukelpoisia vaatisi lisätutkimusta.

Hudson & Gregoriou (2014) kirjoittavat, että logaritmisten tuottojen laskentakaavan käyttäminen riskiä ja tuottoa laskiessa aiheuttaa huomattavan eron absoluuttisten tuottojen laskentakaavaan verrattuna. Tämä aiheutuu siitä, että korkeampi varianssi pienentää automaattisesti odotettuja tuottoja. Tämän takia riskin ja tuoton suhde riippuu siitä, millä tavoin tuotot mitataan.



Kuva 2. Eri tuottojen eron kasvu, kun periodituotot kasvavat

Miskolczin (2017) mukaan absoluuttisten tuottojen ollessa lähellä nollaa, absoluuttiset ja logaritmiset tuotot ovat erittäin lähellä toisiaan. Myös Ultschin (2017) mukaan tuotot ovat hyvin lähellä toisiaan, kun ne ovat alle 10 prosenttia. Kuva 2 havainnollistaa edellistä, sekä kasvavaa eroa tuottojen välillä, kun tuotot suurenevat. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi päiväkohtaisten tuottojen kohdalla merkittävää eroa ei logaritmisten, ja absoluuttisten tuottojen välillä ole. Tämän osoittaa kuva 3, jossa nähdään päivittäinen tuotto, sekä logaritminen tuotto päällekkäin.



Kuva 3. Absoluuttisten ja logaritmisten päivätuottojen ero.

2.3. Tuoton laskentatavan vaikutus tutkimustuloksiin

Tuoton laskentatavalla on vaikutuksia saatuihin tutkimustuloksiin. Miskolzin (2017) tutkimuksessa havaitaan eroja laskettaessa erilaisia tilastollisia tunnuslukuja osakepohjaisesta aineistosta. Tutkimuksen pohjana on 7 eri osaketta, joista Miskolzi laskee keskihajonnan, VaR-luvun (Value at Risk), semivarianssin, sekä odotetun tappion (Expected Shortfall = ES). VaR-luvun ja semivarianssin suhteen tulokset ovat muuttumattomat absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen välillä. Tätä vastoin keskihajontaa ja ES-lukua laskettaessa järjestykset muuttuivat, kun tuoton laskentatapaa muutettiin.

Hudson ja Gregoriou (2014) puolestaan ovat johtaneet approksimointimetodin (KAAVA), jota voidaan käyttää absoluuttisten tuottojen muuntamisessa logaritmisiksi, ja päinvastoin. Approksimointia hyödyntäen he tutkivat kolmea rahoitusalan tutkimusta, joissa on käytetty joko absoluuttista tai logaritmista tuottoa. Tulokset kertovat, että tilastollisen merkitsevyyden ollessa ”melko pieni”, tutkimusten tuloksissa todennäköisesti tapahtuisi muutoksia, jos vaihtoehtoinen tuottojen laskentatapa valittaisiin.

$$\bar{x}_L = \bar{x}_s - 0.5\sigma_S^2 \quad (7)$$

Missä $\bar{x}_L$ on näytteen logaritminen keskituotto, $\bar{x}_s$ on näytteen absoluuttinen keskituotto ja σ_S^2 on näytteen varianssi.

2.4. Meuccin havainnot tuottojen vaikutuksesta tehokkaaseen rintamaan

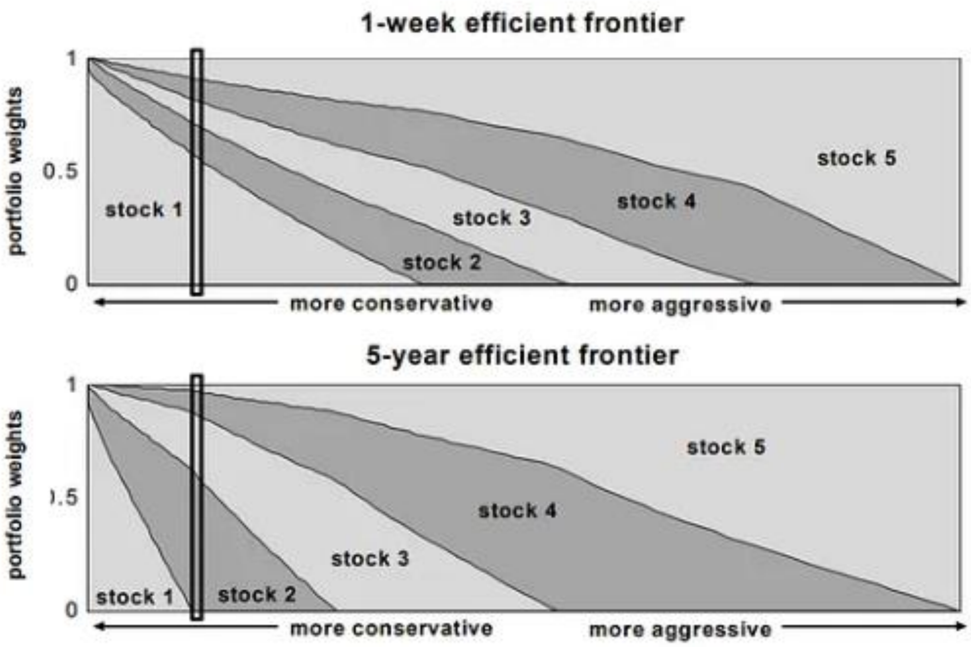
Arvioidessa tehokasta rintamaa, on huomioitava seikkoja, jotka vaikuttavat lopulliseen tehokkaaseen rintamaan silloin, kun estimoidaan tulevaisuuden tehokasta rintamaa. Nämä seikat tulisi huomioida erityisesti myöhemmässä tutkimuksessa, jossa tehokasta rintamaa estimoidaan pidemmälle tulevaisuuteen. Tässä tutkimuksessa tulevaisuuden tehokkaiden rintamien estimointi ei ole pääasia, mutta mainitut seikat ovat silti tärkeitä kokonaisuuden ymmärtämiseksi.

Tavallisessa Markowitzin mallissa estimoidaan portfolion keskiarvo, ja kovarianssi. Suhde merkitsee, että tuotot ovat muuttumattomia, tilastollisin termein identtisiä ja itsenäisiä yli ajan. Kaava 5 pätee osakkeille, mutta se ei pidä paikkansa joukkovelkakirjalainoilla, tai etenkään optioille.

Toisena seikkana on huomioitava, että käytettäessä päiväkohtaisia tuottoja (logaritmisia tai absoluuttisia), ne eivät tuota oikeita portfolion keskiarvoja ja variansseja yli ajan. Riippumatta valitusta tuotosta, tehokas rintama on sama, vaikka investointiajanjakso muuttuisi. Todellisuudessa portfolion tulisi olla sitä joustamattomampi volatiliteetin suhteen, mitä pidemmän aikaa investointi kestää. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että investoitaessa rahaa esimerkiksi 10 vuodeksi ilman, että siihen kosketaan välissä, päivittäiset heilahtelut arvopapereiden hinnoissa eivät vaikuta lopputulokseen.

Mainituista syistä johtuen Meucci (2010) esittää, että oikea tapa tuottojen laskemiseksi olisi absoluuttisten tuottojen laskeminen suoraan investointiajanjakson yli (KAAVA), ja estimoida laskettujen tuottojen jakaumat.

$$R_t = \frac{P_{t+K}}{P_{t-1}} - 1 \qquad (8)$$



Kuva 4. Tehokkaat rintamat eri sijoitushorisonteilla (Meucci 2010).

Kuva 4 näyttää Meuccin toteuttaman optimoinnin selitettyä metodia hyödyntäen. Tehokas rintama on erisuuruinen riippuen siitä, kuinka pitkä sijoitushorisontti on. Mitä pidemmälle sijoitushorisontilla päästään, sitä enemmän portfolio suosii tuottoa riskin sijaan. Tehokas rintama siis riippuu sijoitushorisontin pituudesta, kun tehokasta rintamaa estimoidaan tulevaisuuteen.

3. Moderni portfolioteoria

Moderni portfolioteoria (MPT) on Harry Markowitzin (1952) ensimmäisen kerran esittelemä teoria arvopaperiportfolion muodostamisesta. Se julkaistiin ensimmäisen kerran *Journal of Science*-lehdessä vuonna 1952. Markowitz palkittiin Nobelin palkinnolla vuonna 1990 työstään modernin portfolioteorian kehittämiseksi.

Moderni portfolioteoria on luonut pohjan modernille porfolion hallinnalle, ja modernia portfolioteoriaa pidetään laajalti yhtenä tärkeimmistä taloustieteellisistä teorioista. Mangramin (2013) mukaan MPT koostuu Markowitzin portfolion valintateoriasta, joka julkaistiin Markowitzin esseessä *”Portfolio Selection”* (1952), sekä laajemmin Markowitzin kirjassa *”Portfolio Selection: Efficient Diversification”* (1959), ja lisäksi William Sharpen vuonna 1964 esittelemän CAP-mallin (CAPM) myötävaikutuksesta.

Fabocci, Gupta ja Markowitz (2002) kuvailevat MPT:a sijoitusviitekehykseksi portfolion valinnalle ja rakentamiselle perustuen portfolion odotettujen tuottojen maksimoimiseen ja samanaikaiseen riskien minimoimiseen. He jatkavat toteamalla, että MPT:n riskikomponenttia voidaan mitata monilla matemaattisilla mallinnuksilla, ja sitä voidaan vähentää hajauttamalla sijoituksia. Hajauttaminen on yksi MPT:n pääteemoista. Lisäksi he kertovat, että modernin portfolioteorian perintönä on syntynyt lukemattomia innovaatioita rahoituksen alalla. Näitä ovat esimerkiksi faktorimallit, value-at-risk (VaR), ja erilaiset sijoitusten suojausstrategiat.

Kuten mikä tahansa muukin teoreettinen konsepti, myös MPT sisältää useita oletuksia. Sellaisenaan se toimii perustana portfolion luomiselle mean-variance-viitekehyksen sisällä, jossa on haluttu määrä riskillisiä arvopapereita, ja se voi sisältää niin kutsutun riskittömän arvopaperin (risk-free asset).

Modernin portfolioteorian oletuksia ovat (Mangram 2013; Markowitz 1952; Markowitz 1959):

- Täydelliset markkinat
- Riskitön arvopaperi on kaikkien sijoittajien saatavilla
- Ei transaktiokustannuksia, eikä veroja
- Arvopaperit ovat täysin jaettavissa
- Rajoittamattomat long- ja short-positiot ovat sallittuja
- Sijoittajat ovat rationaalisia, ja riskiä välttäviä.
- Hyötyfunktio on kvadraattinen
- Tuotot seuraavat normaalijakaumaa
- Sijoittajat pyrkivät maksimoimaan voittonsa
- Sijoittajat pyrkivät maksimoimaan portfolion tuottoa (tai minimoimaan riskiä)
- Sijoittajat välittävät vain arvopaperin keskiarvosta ja varianssista

3.1. Portfolioteorian keskeiset matemaattiset yhtälöt

Modernissa portfolioteoriassa optimoidaan portfolio, joka sisältää useita arvopapereita. Tämä tapahtuu muuttamalla arvopapereiden suhteellista osuutta portfoliossa, ja etsimällä esimerkiksi Sharpen luvun avulla riskikorjatulta tuotoltaan tehokkain portfolio.

Portfolion odotettu tuotto on määritelty odotettujen tuottojen summaksi kullekin arvopaperille $E(r_i)$, kerrottuna kunkin painolla w_i, tai osuudella portfoliossa, jossa kaikkien painojen summa on yhtä kuin yksi.

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{10}$$

Portfolion varianssi *n* eri arvopaperilla, σ_p^2, on yksittäisten arvopapereiden varianssien funktio, sekä kunkin arvopaperikombinaation kovarianssi, missä σ_{ij} on arvopapereiden *i* ja *j* välinen kovarianssi.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} w_i \sigma_{ij} w_j \tag{11}$$

3.1.1. Sharpen luku

Sharpen luku on taloudellinen mittari, jota käytetään sijoituksen tai portfolion riskikorjatun tuoton mittaamiseen. Sen kehittäjä on Nobel-palkittu William F. Sharpe (1966), ja alun perin Sharpe kutsui sitä ”reward-to-variability”-asteeksi. Vuosien aikana Sharpen luku on saanut valtavasti suosiota. Sen myötä sitä on myös kehitetty pidemmälle erilaisilla yleisversioilla.

Sharpen luku on suunniteltu mittaamaan odotettua tuottoa yhtä riskiyksikköä kohden. Korkeampi Sharpen luku tarkoittaa korkeampaa riskikorjattua tuottoa. Tämä tarkoittaa, että sijoittaja saa parempaa tuottoa ottamaansa riskiä kohden. Sharpen luku on määritelty alla portfoliolle S_p

$$S_p = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \tag{12}$$

.

Missä R_p portfolion odotettu tuotto, R_f on riskittömän arvopaperin, kuten valtion joukkovelkakirjan tuotto ja σ_p on portfolion keskihajonta. Portfolion riskittömän portfolion odotetun tuoton ja riskittömän arvopaperin odotetun tuoton erotusta kutsutaan riskipreemioksi.

Sharpe (1994) kirjoittaa, että riippumatta siitä mitataanko Sharpen luku ennen vai jälkeen tapahtumien (*ex-ante, ex-post*), Sharpen luku tulee laskea käyttäen differentiaalituoton keskiarvoa ja keskihajontaa. Alkuperäisenä peruspisteenä (benchmark) Sharpen luvulle on ollut riskitön arvopaperi. Tällöin differentiaalituotto tarkoittaa arvopaperin ylimääräistä tuottoa verrattuna yhden periodin riskittömän arvopaperin korkoasteeseen. Tämä määritelmä on käytössä myös tässä tutkielmassa.

Sharpe (1994) myös huomauttaa, että Sharpen luku ei huomioi korrelaatioita arvopapereiden välillä. Hänen mukaansa korrelaatiot tulisi olla liitteenä, kun Sharpen lukuja verrataan keskenään. Lisäksi Sharpen luvun taustalla on joukko oletuksia, jotka käytännön tasolla pätevät vain suunnilleen. Siitä huolimatta Sharpen luku tarjoaa hyvän vaihtoehdon mittariksi, joka ottaa sekä riskin että odotetun tuoton huomioon verrattuna mittariin, joka huomioi vain toisen näistä.

3.1.2. Lagrangen kertoimet

Modernissa portfolioteoriassa pyrkimyksenä on ratkaista arvopapereiden painotukset portfoliossa siten, että Sharpen luku on maksimoitu. Tämä ongelma voidaan ratkaista minimoimalla portfolion varianssi (yhtälö Sharpen luvun yläpuolella) ehtojen mukaisesti (yhtälöt x ja y). Ongelman ratkaisemiseksi voidaan hyödyntää Lagrangen kertoimia.

Yhtälön ensimmäisenä terminä on portfolion varianssi, joka minimoidaan. Ensimmäinen rajoite pakottaa portfolion odotetun tuoton määriteltyyn keskiarvotuottoon. Toinen rajoite vaatii, että portfolion painojen summa on yksi, jolloin kaikki käytettävissä olevat rahat on käytetty. Merkitään $\mathrm{E}(r_i) = e_i$ ja $\mathrm{E}(r_p) = d$.

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i e_i - d \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right) \qquad (13)$$

Funktion minimoimiseksi otetaan ensimmäisen kertaluvun ehdot muuttujien w_i, λ_1 ja λ_2 suhteen.

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_{11} + 2w_2\sigma_{12} + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_{22} + 2w_1\sigma_{12} + \lambda_1 e_2 + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = w_1 e_1 + w_2 e_2 - d = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w_1 + w_2 - 1 = 0 \tag{14}$$

Lineaariset yhtälöt asetetaan matriisimuotoon yhtälön 14 mukaisesti.

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & e_1 & 1 \\ 2\sigma_{21} & 2\sigma_{22} & e_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d \end{bmatrix} \tag{15}$$

Matriisista ratkaistaan painovektori:

$$Cx = k$$
$$C^{-1}Cx = C^{-1}k$$
$$Ix = C^{-1}k \tag{16}$$

Missä C osoittaa vasemmanpuoleisen matriisin, x keskimmäisen matriisin, ja k oikealla puolella olevan matriisin.

Tästä ratkaistaan painojen arvot muuttujan d suhteen

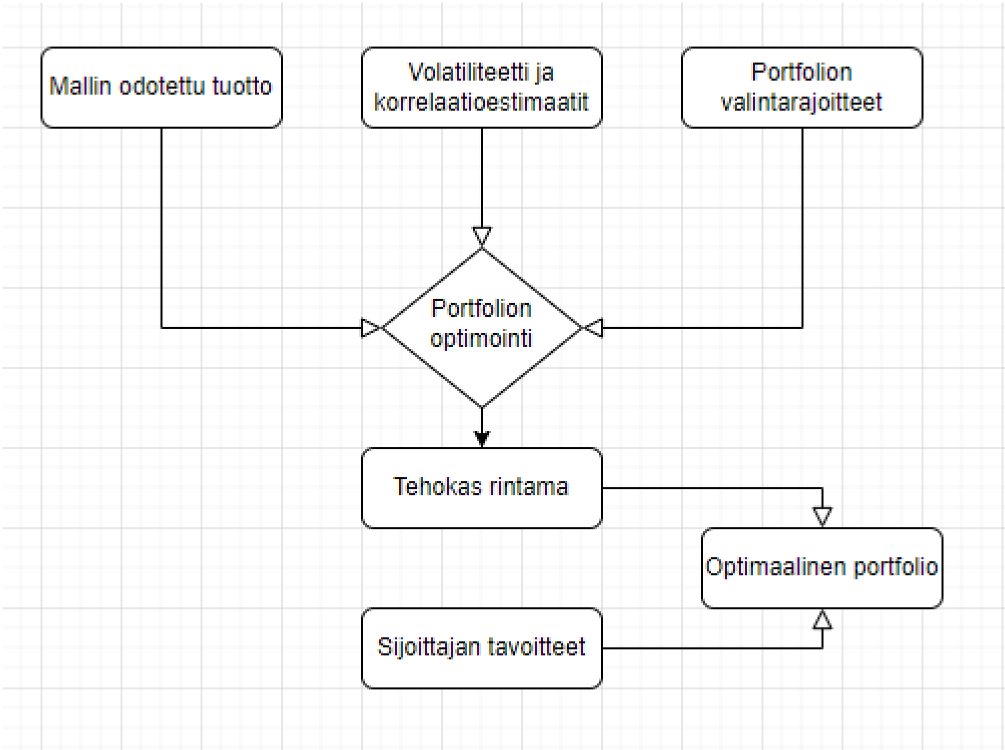
$$\begin{aligned} x_1 &= a + b_1 d \\ x_2 &= a + b_2 d \end{aligned} \tag{17}$$

missä a ja b ovat vakioita. Muuttujaa d muokkaamalla voidaan johtaa tehokkaan rintaman arvot.

3.2. Mean-Variance-malli

Markowitz (1952) kertoo, että portfolion valinta prosessi voidaan jakaa kahteen osaan. Ensimmäinen osa alkaa havainnoilla sekä kokemuksilla datasta, ja loppuu uskomuksiin arvopapereiden tulevaisuuden odotuksista. Toinen osa alkaa relevanteista uskomuksista liittyen tulevaisuuden odotuksiin, ja loppuu portfolion valintaan.

Kuva 5 osoittaa yksinkertaisesti, kuinka MPT:n mukainen modernin portfolioteorian prosessi etenee. Fabocci, Gupta ja Markowitz (2002) mukaan prosessi itsessään on suoraviivainen, mutta implementaatio voi olla melko monimutkainen. Käytännössä portfolion optimointiin tarvitaan valittujen arvopapereiden tuotot, volatiliteetit, sekä valitut rajoitteet. Näiden avulla voidaan optimoida portfolio, josta saadaan tehokas rintama. Tehokkaalta rintamalta sijoittaja valitsee tavoitteidensa mukaisen optimaalisen portfolion valitsemalla haluamansa tuoton tai riskin.



Kuva 5. Portfolioteorian prosessikaavio

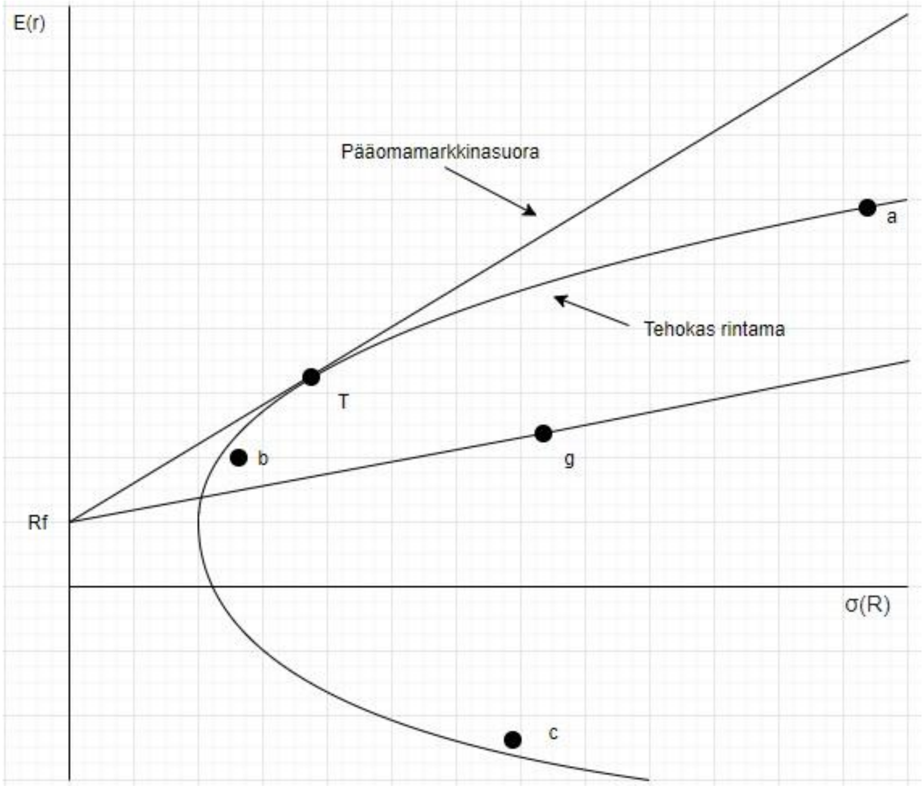
3.2.1. Tehokas rintama

Moderni portfolioteoria tiivistyy tehokkaan rintaman ympärille. Se auttaa sijoittajia maksimoimaan odotetut tuotot, ymmärtämään portfolioiden riskit ja tuotot, sekä analysoimaan tehokkaita portfolioita omia portfolioitansa vastaan. Kuten usein todetaan, riski ja tuotto kulkevat käsi kädessä. Tehokas rintama tiivistää tämän yksinkertaiseksi kokonaisuudeksi, jossa kasvava riski näkyy tuottojen kasvamisena.

Tehokkaalla rintamalla tarkoitetaan kaikkia optimaalisia portfolioita, joista saadaan mahdollisimman korkea tuotto valitulla riskitasolla, tai vaihtoehtoisesti mahdollisimman pieni riski valitulla tuottotasolla. Mikäli sijoittaja valitsee portfolion tehokkaan rintaman alapuolelta, hän valitsee portfolion, joka on epäoptimaalinen. Toisin sanoen samalla riskin tasolla sijoittaja voisi saada enemmän tuottoa, tai samalla tuoton määrällä sijoittaja voisi saada portfoliolleen pienemmän riskin. Tämä myös tarkoittaa Mangramin (2013) mukaan sitä, että hajauttaminen voi kasvattaa portfolion odotettua tuottoa kasvattamatta sen riskiä. Hän jatkaa kertomalla, että Markowitzin teoria merkitsee rationaalisten sijoittajien etsivän portfolioita, jotka tuottavat mahdollisimman suuria tuottoja pienimmällä mahdollisella määrällä riskiä, tarkoittaen portfolioita, jotka sijaitsevat tehokkaalla rintamalla.

Sijoittajan asemoituminen tehokkaalle rintamalle riippuu sijoittajan riskiprofiilista. Paljon riskiä välttävät sijoittavat pyrkivät valitsemaan portfolion, joka on lähellä tehokkaan rintaman vasenta laitaa. Tämä on kohta, jossa tehokkaalle rintamalle asetettava tangentti on pystysuora y-akselin suuntaisesti. Minimivarianssiportfolion valitsevat sijoittajat hylkäävät korkeamman odotetun tuoton saadakseen portfoliolleen mahdollisimman pienen riskin. Riskiä paremmin sietävät sijoittajat valitsevat portfolionsa tehokkaan rintaman kasvavalta osuudelta, esimerkiksi valitsemalla kuvan 6 portfolion a. Kasvattamalla portfolionsa riskiä, nämä sijoittajat nostavat portfolioidensa odotettua tuottoa.

Kuva 6 havainnollistaa tehokasta rintamaa. E(r) on odotettu tuotto, Rf kuvaa riskitöntä pääomaa, T on tangenttiportfolio ja σ(R) on portfolion riski. Kirjaimet a, b, c ja g kuvaavat yksittäisiä portfolioita. Tangenttiportfolio T on tehokkain mahdollinen portfolio riskin ja tuoton näkökulmasta, eli sillä on korkein Sharpen luku. Tehokkaalla rintamalla sijaitsevat kaikki optimaaliset portfoliot, kuten esimerkiksi portfolio a. Tehokkaan rintaman yläpuolella ei ole portfolioita, sillä sellaista portfoliota ei ole mahdollista muodostaa.



Kuva 6. Tehokkaan rintaman komponentit

3.2.2. Pääomamarkkinasuora

Mikäli sijoittajalla on mahdollisuus hyödyntää riskitöntä arvopaperia portfoliota valitessaan, tehokkaaksi rintamaksi muodostuu niin kutsuttu pääomamarkkinasuora. Tämän osoittaa myös kuva 6. Riskitön arvopaperi on reaalimaailmassa esimerkiksi USA:n 10-vuotinen valtionvelkakirja.

Pääomamarkkinasuora kuvaa kaikkia portfolioita, jotka yhdistävät riskin ja tuoton optimaalisesti. Kun sijoittajalla on mahdollisuus riskittömän arvopaperin hyödyntämiseen, kysymys on hajauttamisesta riskittömän ja riskillisen arvopaperin välillä.

Tämän tutkimuksen kannalta tärkeimpänä seikkana on ymmärtää, että pääomamarkkinasuoran ja tehokkaan rintaman tangentti on niin sanottu tangenttiportfolio, eli Sharpe-luvultaan tehokkain mahdollinen portfolio.

3.3. Hajauttaminen

Modernin portfolioteorian tärkeimpinä löydöksinä pidetään hajauttamista. MPT:n mukaisesti sijoittajat voivat optimoida tuottojansa ja samalla vähentää riskejään hajauttamalla portfolionsa esimerkiksi toimialoittain, omaisuusluokittain, ja maantieteellisesti. Hajauttamalla sijoituksensa, sijoittaja vähentää portfolionsa riskiä ja tekee siitä tasapainoisemman. Hajauttaminen myös tarjoaa sijoittajalla mahdollisuuden sopeuttaa portfolion tiettyjen sijoitustavoitteiden mukaisesti, kuten sijoitusten arvon säilyttämisen, samalla minimoiden riskin.

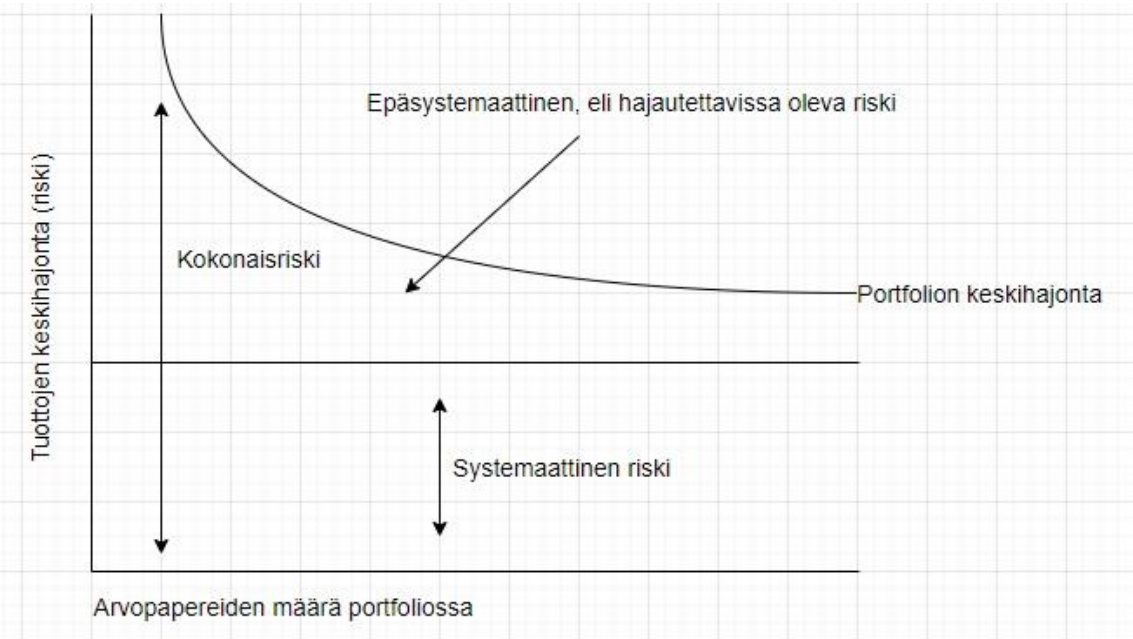
Älä laita kaikkia munia samaan koriin. Tämän teesin mukaisesti myös Fabocci, Gupta ja Markowitz (2002) kertovat hajauttamisen hyödyistä. Heidän mukaansa MPT onnistui kvantifioimaan hajauttamisen esittelemällä kovarianssin tai korrelaation tilastollisen merkinnän. Toisin sanoen sijoitusten laittaminen arvopapereihin, joiden tuotot ovat keskenään korkeasti korreloituneita ei ole erityisen viisas strategia.

Markowitz (1990) huomauttaa, että tulevaisuuden tunteva sijoittaja laittaisi rahansa tuottoisimpaan mahdolliseen osakkeeseen, eikä hajauttaisi sijoituksiaan. Mikäli monilla arvopapereilla olisi sama tuotto tulevaisuudessa, sijoittaja olisi välinpitämätön näiden arvopapereiden välillä. Tulevaisuuden ollessa epävarma, on yleistä että sijoituksia hajautetaan.

3.3.1. Riski

Riskille ei ole yhtä vakiintunutta määritelmää, Kuitenkin se voidaan määritellä useammalla tavalla. Willisin (2007) mukaan riski vastaa odotettua tappiota, ja Campbellin (2005) mukaan riski vastaa odotettua hyödyn menetystä. Taloustieteellisesti riski määritellään useimmiten esimerkiksi portfolion tuottojen keskihajonnaksi, ja se mittaa portfolion tuottojen vaihtelua.

Markowitzin (1952) mukaan kaikkea riskiä ei pystytä eliminoimaan. Mangram (2013) kertoo, että vaikka hyvin hajautettu portfolio vähentää siihen kohdistuvaa riskiä, kaiken riskin poistaminen on käytännössä mahdotonta. Hän jatkaa toteamalla, että arvopaperin riskiä voidaan analysoida kahdella tavalla, yksittäisenä arvopaperina, tai portfolion osana. Tyypillisesti riski jaetaan kahteen päätyyppiin; systemaattiseen ja epäsystemaattiseen riskiin. Epäsystemaattista riskiä kutsutaan myös hajautettavissa olevaksi riskiksi, eli sitä pystytään ainakin vähentämään hajauttamalla sijoituksia. Systemaattista riskiä puolestaan ei pysty vähentämään tai poistamaan hajauttamalla ja sitä kutsutaan myös markkinariskiksi. Systemaattinen riski johtuu ulkoisista tekijöistä, kuten lamasta, korkeista koroista, sodasta tai inflaatiosta. Nämä tekijät vaikuttavat suurimpaan osaan yrityksistä. Kuva 7 havainnollistaa, osoittaen edellä todetun.



Kuva 7. Systemaattinen ja epäsystemaattinen riski

3.3.2. Korrelaatio

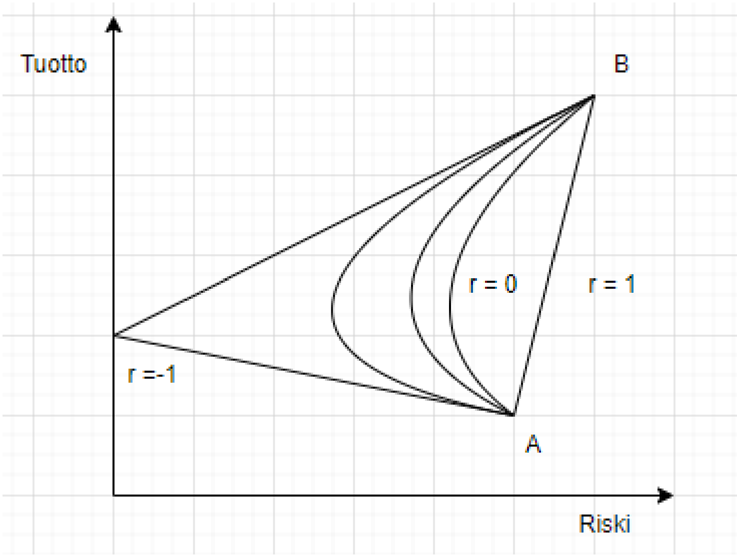
Korrelaatio (kaava 17) mittaa kahden muuttujan (arvopaperin) välisen suhteen voimakkuutta. Kaavassa r_{xy} on korrelaatiokerroin, x_i merkitsee ensimmäisen arvopaperin x arvoja, y_i puolestaan toisen arvopaperin y arvoja. Arvopaperin x arvojen keskiarvoa merkitään $\bar{x}$, ja arvopaperin y keskiarvoa puolestaan $\bar{y}$.

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}} \tag{18}$$

Taylor (2023) huomauttaa, että korrelaatiotaei tule sekoittaa kausaliteetin kanssa. Tämä tarkoittaa, että vaikka kaksi muuttujaa (arvopaperia) olisivat keskenään korreloituneita, se ei merkitse että yksi muuttuja aiheuttaisi muutokset toisessa muuttujassa. Korrelaatio ainoastaan määrittelee muuttujien välisen suhteen, ja suhteeseen vaikuttavia tekijöitä voi olla useita. Kausaatio on mahdollinen syy korrelaatiolle, mutta ei ainoa mahdollinen selitys.

Markowitz (1959) kertoo, että korrelaatio arvopapereiden välillä tarjoaa mahdollisuuden portfolion hajauttamiselle, jolloin portfolion riski laskee tuottoja pienentämättä. Jotta hajauttamishyöty voidaan maksimoida, keskenään korkeasti korreloituneita yrityksiä olisi vältettävä samassa portfoliossa.

Kuva 8 osoittaa, kuinka korrelaatio vaikuttaa portfolion hajauttamiseen ja siitä saataviin hyötyihin. Kuvassa on kaksi arvopaperia A ja B, joiden korrelaatio voi olla välillä -1 ja 1. Riippuen arvopapereiden välisestä korrelaatiosta, tehokas rintama muuttuu. Samoin havaitaan, että tehokas rintama muuttuu riippuen korrelaation eri arvoista. Kun korrelaatio arvopapereiden välillä on 1, muutos arvopapereissa on täsmälleen samanlainen. Toisin sanoen, jos arvopaperin A hinta laskee 50 %, myös arvopaperin B hinta laskee 50 %. Tällöin hajautushyötyä ei ole.



Kuva 8. Korrelaatio kahden eri arvopaperin välillä.

Korrelaation laskiessa portfolion hajautushyöty kasvaa. Tästä johtuen tehokas rintama kaartuu vasemman kautta. Mitä pienempi arvopapereiden välinen korrelaatio on, sitä suurempi on hajautushyöty. Tästä myös seuraa, että tehokas rintama kaartuu enemmän ja enemmän vasemmalle. Kun arvopaperit ovat täysin negatiivisesti korreloituneita, korrelaatioltaan -1, arvopapereiden välinen riski on nolla. Käytännössä tämä ei kuitenkaan ole mahdollista, jonka takia tehokas rintama on yleensä vasemmalta kaartuva viiva.

3.3.3. Kovarianssi

Taloudellisessa kontekstissa kovarianssi (kaavassa 18) mittaa kahden arvopaperin välistä suhdetta. Kovarianssi voi olla positiivista, tai negatiivista. Positiivisessa kovarianssissa arvopapereiden tuotot liikkuvat samansuuntaisesti. Negatiivisessa kovarianssissa arvopapereiden tuotot puolestaan liikkuvat toisiaan vasten, eli arvopaperin *x* tuottojen noustessa arvopaperin *y* tuotot laskevat.

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_j - \bar{Y})}{n-1} \qquad (19)$$

Tehokasta rintamaa muodostettaessa lasketaan eri arvopapereiden välisiä kovariansseja, joiden avulla löydetään arvopaperit, joilla on toistensa suhteen mahdollisimman pienet positiiviset kovarianssit toisiinsa nähden. Tästä seuraa, että epäsystemaattisen riskin määrä portfoliossa vähenee.

Kovarianssi eroaa korrelaatiosta Taylorin (2023) mukaan seuraavasti; kovarianssista voidaan määritellä arvopapereiden välisen suhteen suunta, eli liikkuvatko arvopapereiden tuotot samaan suuntaan, vai liikkuvatko ne eri suuntiin toisistaan. Korrelaatio puolestaan mittaa arvopapereiden välisen suhteen voimakkuutta. Korrelaatiokerrointa mitataan aina puhtaana arvona, eikä yksikköinä.

3.3.4. Hajauttaminen globaaleilla markkinoilla

Hajauttamisen toteuttaminen nykypäivän globaaleilla markkinoilla voi olla näkökulmasta riippuen helpompaa, tai vaikeampaa kuin aikaisempina vuosikymmeninä. Jotkut omaisuusluokat ovat aiempaa korreloituneempia, jolloin esimerkiksi yksittäiset suuret toimijat määräävät omaisuusluokan kehitystä. Toisaalta esimerkiksi perinteiset rahastot, sekä ETF-rahastot ovat tehneet hajauttamisesta sekä helppoa, että halpaa.

Solnik, Boucrelle ja Le Fur (1996) kirjoittavat, että kansainväliset korrelaatiot vaihtelevat sekä maiden välillä että yli ajan. Lisäksi kansainväliset korrelaatiot vaikuttavat heidän mukaansa kasvavan, kun markkinoilla on korkea volatiliteetti. Näistä tekijöistä huolimatta kansainvälinen sijoittaminen on riskien hajauttamisen ja tuottomahdollisuuksien ansiosta kannustettavaa. Vaikka markkinoilla olisi korkea volatiliteetti ja täten korrelaatiot olisivat kasvaneet, kansainväliset korrelaatiot pysyvät pääosin sopivina riskien hajauttamisen kannalta.

Eun, Huang ja Lai (2008) kertovat, että kansainvälisestä hajauttamisesta saadut hyödyt johtuvat pääasiassa suhteellisen matalista korrelaatioista eri kansainvälisten arvopapereiden välillä, verrattuna kotimaan arvopapereiden välillä oleviin korrelaatioihin. He jatkavat toteamalla, että niin sanotuilla large-cap-rahastoilla on tyypillisesti suuremmat korrelaatiot toistensa kanssa, kuin small-cap-rahastoilla. Huolimatta suuremmista transaktiokustannuksista, kansainvälisen hajauttamisen hyödyt voivat tuoda sijoittajille huomattavia lisätuottoja, erityisesti jos he harkitsevat ulkomaisiin small-cap-rahastoihin sijoittamista.

3.3.5. Arvopapereiden määrä hajautetussa portfoliossa

Markowitz (1952) kirjoittaa, että hajauttamisen onnistuminen ei riipu ainoastaan eri arvopapereiden määrästä. Esimerkiksi 60 rautatieosakkeeseen sijoittava portfolio ei ole yhtä hyvin hajautettu kuin usealle eri toimialalle sijoittava portfolio. Tämä johtuu siitä, että samalla toimialalla toimivat yritykset yleisesti ottaen menestyvät heikosti samanaikaisesti.

Wagnerin ja Laun (1971) mukaan portfolion hajauttamista voidaan käyttää yksittäisten osakkeiden riskin syrjäyttämiseen. Sen seurauksena portfoliot, joissa on suuri määrä korkeariskisiä osakkeita voivat olla jopa matalampia riskiltään kuin portfoliot, jotka sisältävät pienen määrän matalariskisiä osakkeita, ja siitä huolimatta ne voivat ansaita parempia tuottoja kuin matalariskisten osakkeiden portfoliot. Elton ja Gruber (1977) ilmoittavat, että portfolion keskihajonnasta eli riskistä 61 prosenttia voidaan poistaa hajauttamalla. Jäljelle jäävä 39 prosenttia on systemaattista riskiä, jota ei voida poistaa hajauttamalla. He myös toteavat, että hajautettavissa olevan riskin hajauttaminen on sitä hitaampaa, mitä enemmän arvopapereita portfoliossa on.

Osakkeiden määrä hyvin hajautetussa portfoliossa on pitkään jatkunut keskustelunaihe. Statman (1987) esittää, että hyvin hajautetussa portfoliossa on vähintään 30 osaketta. Toisaalta Evansin ja Archerin (1968) mukaan suurin osa hajautettavissa olevasta riskistä on hajautettu, kun portfolioon lisätään kahdeksas osake. Heidän mukaansa yli 10 osakkeen portfolio ei välttämättä enää ole taloudellisesti kannattavaa. Elton ja Gruber (1977) kertovat, että kasvattamalla portfolion kokoa yhdestä arvopaperista kymmeneen, vähenee 51 prosenttia portfolion keskihajonnasta. Jos siihen lisätään vielä 20 osaketta, niin portfolion keskihajonnasta saadaan poistettua 58 prosenttia. Tämä tarkoittaisi heidän mukaansa, että epäsystemaattinen riski olisi saatu hajautettua pois lähes kokonaan.

Alexeev ja Tapon (2013) kirjoittavat, että parhaiten hajautetuissa salkuissa on 38–49 osaketta 90 prosenttia kerroista. Tästä huolimatta he myös toteavat, ettei ole täysin selvää kuinka monta osaketta vaaditaan, että epäsystemaattinen riski saadaan suurimmaksi osaksi hajautettua pois. Liian monen osakkeen pitäminen osakesalkussa ei ole heidän mukaansa erityisen kustannustehokasta. Monien osakkeiden ostaminen on kallista transaktiokustannusten takia erityisesti rakennettaessa alkuperäistä osakesalkkua. Mitä suurempi määrä osakkeita portfoliossa on, sitä todennäköisempää on kyseisen portfolion alisuoriutuminen peruspisteeseen nähden, kun huomioidaan erilaiset pakolliset maksut.

4. Tilastollinen analyysi

4.1. Tutkimusmenetelmät

Tässä tutkielmassa käytetään R-ohjelmointikieltä, joka on avoimen lähdekoodin ohjelmointikieli, ja se on vapaasti ladattavissa internetistä. R-ohjelmointikieltä käytetään laajasti tilastollisessa laskennassa, data-analyysissä, sekä datan visualisoinnissa. Mean-Variance-mallit, joita tutkielmassa käytetään, on laskettu R-ohjelmointikieltä hyödyntäen. Näistä malleista johdetaan tehokkaat rintamat, portfolioiden painotukset, sekä painotetut tuotot.

Tutkielman data-analyysissä hyödynnetään useita kirjastoja, kuitenkin laajimmin fPortfolio-kirjastoa. Tukena fPortfolion käytössä on ollut Wurtzin ja muiden (2015) kirjoittama ”Portfolio Optimization with R/Rmetrics”-käyttäjäopas. fPortfolio-kirjasto tarjoaa useita työkaluja portfolioanalyysiin, ja optimointiin. Tässä kappaleessa esiintyvät taulukot ja graafit on pieniä poikkeuksia lukuunottamatta ohjelmoitu hyödyntäen fPortfolion tarjoamia ominaisuuksia.

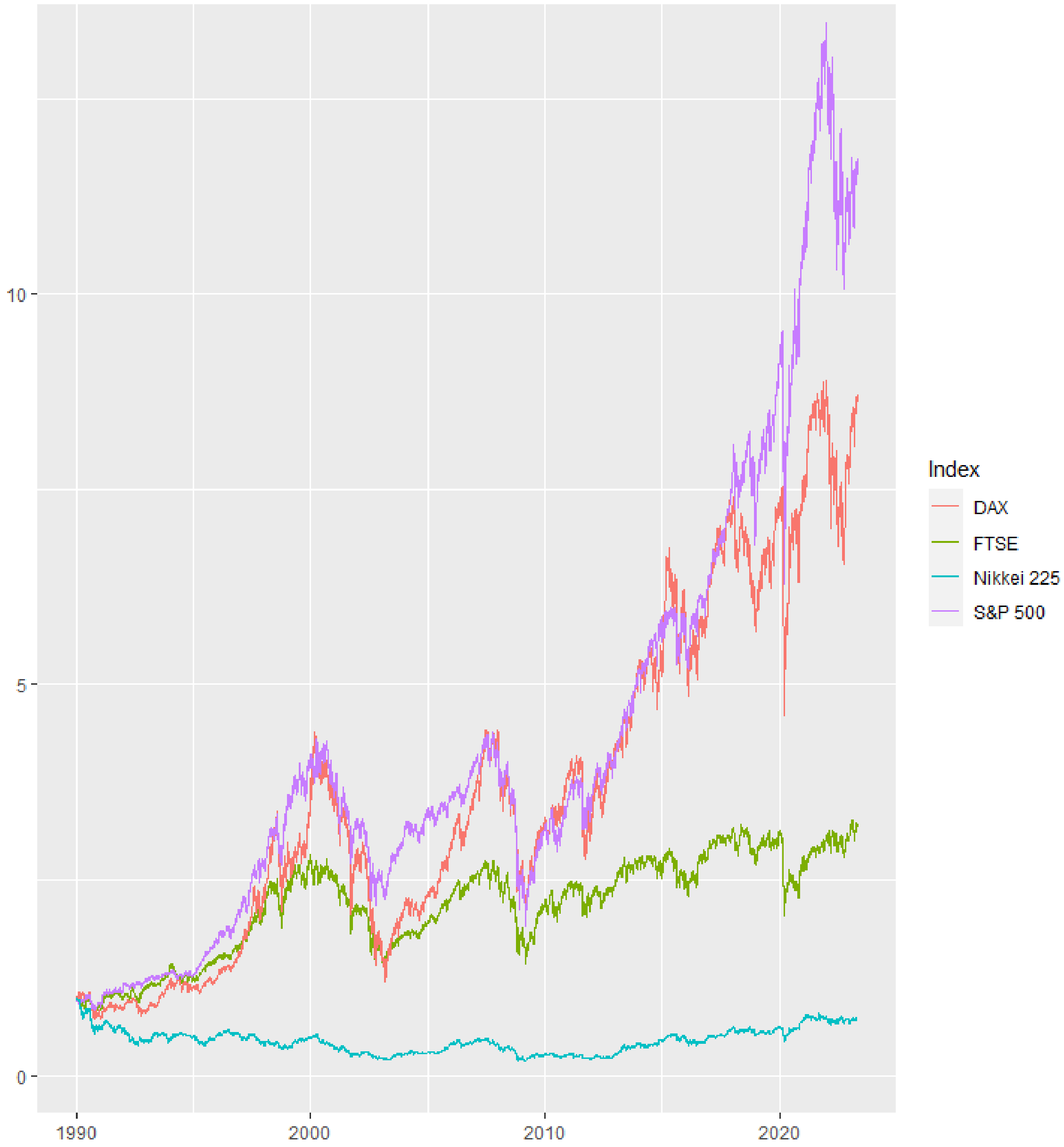
4.2. Indeksituotot tarkastelussa

Analyysissä tutkitaan neljän markkina-alueen osakemarkkinaindeksejä. Indeksit on valittu ensisijaisesti ajatellen kunkin indeksin sijoittumista maantieteellisesti. Toisena valintakriteerinä on ollut kunkin osakeindeksin kattava toimialajakauma. Kolmantena valintakriteerinä on toiminut yleinen tunnettuus, sekä indeksien helposti löydettävä historiadata.

S&P500 (Standard & Poors 500)-indeksi mittaa Yhdysvaltojen 500 suurimman yhtiön suoriutumista osakemarkkinoilla. Sitä pidetään yleisesti maailman laajimmin seurattuna indeksinä. Nikkei 225-indeksi on Japanilainen Tokion pörssin indeksi. Ensimmäisen kerran se on esitelty vuonna 1950, ja se on yleisesti yksi seuratuimmista

Aasian indekseistä. Nikkei 225 koostuu 225 yrityksestä, jotka ovat listautuneena Tokion pörssiin. Manner-Euroopasta mukaan valittu DAX-indeksi on Saksan Frankfurtin pörssin osakemarkkinaindeksi. Se koostuu 30 suuryrityksestä. Viimeisenä mukana on Lontoon pörssin FTSE 100-indeksi, joka koostuu 100 Lontoon pörssin suurimmasta yrityksestä. Kukin esitelty indeksi on maansa ”benchmark”-indeksi, johon yksittäisiä osakkeita usein verrataan, ja jonka perusteella tehdään myös laajempia tulkintoja kunkin maan taloudellisesta menestyksestä.

Kuvissa 9 ja 10 on kunkin indeksin kehityskäyrä mitattuna vuodesta 1990 alkaen. Kuvassa 9 indeksituotot on esitetty lineaarisella asteikolla, kuvassa 10 puolestaan logaritmisella asteikolla. Murphy (2021) kirjoittaa, että lineaarisella asteikolla y-akselin hinnat ovat toisistaan yhtä kaukana. Tämä tarkoittaa myös sitä, että lineaarisella asteikolla kuvataan absoluuttisia muutoksia, jos arvopaperin hinta nousee 5 eurosta 10 euroon, niin kuvaaja liikkuu y-akselilla arvosta 5 arvoon 10. Logaritmisella asteikolla y-akselin hinnat eivät ole saman etäisyyden päässä toisistaan. Käytännössä tämä tarkoittaa, että muutokset arvopaperin hinnassa kuvataan prosentuaalisena muutoksena, jolloin esimerkiksi kahden arvopaperin yhtäläinen prosentuaalinen muutos piirretään yhtä suurena pystysuuntaisena matkana asteikolla.



Kuva 9. Indeksituotot lineaarisella asteikolla

Kuvan 9 ja 10 välillä havaitaan selvä ero erityisesti Nikkei 225-indeksin suhteen. Lineaarisella asteikolla muutokset Nikkei-225 pörssin indeksissä on huomattavan pienen näköisiä. Logaritminen asteikko kuvaakin paremmin indeksien välistä kehityskulkua vuosien varrella.

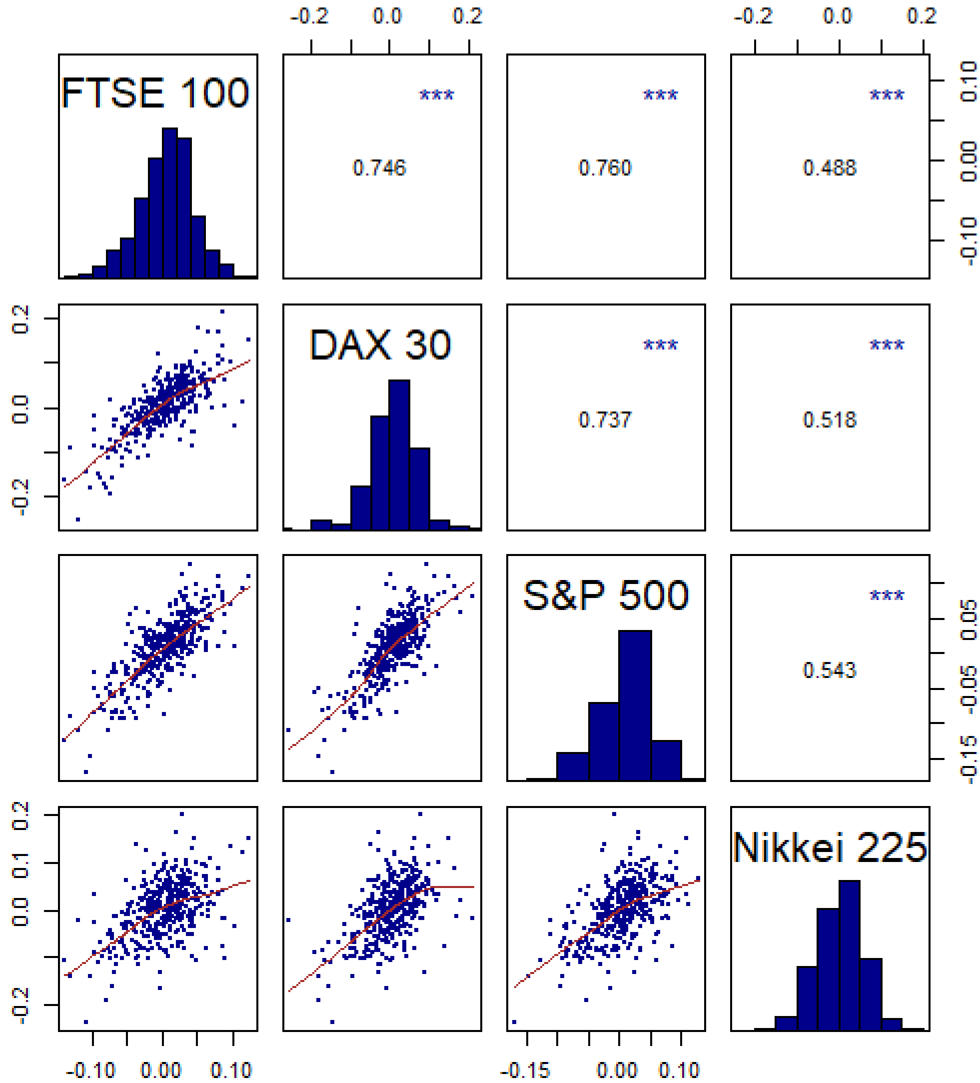
Tehokkaiden portfolioiden muodostamisen kannalta näistä graafeista voidaan päätellä, että indeksit ovat ainakin osittain korreloituneet keskenään. Erityisesti DAX 30-indeksi, sekä S&P 500-indeksi seuraavat melko vahvasti toistensa liikkeitä. Toisaalta etenkin

FTSE 100 ja Nikkei 225 indeksit ovat menestyneet pitkällä tarkasteluvälillä huomattavasti heikommin kuin DAX 30 ja S&P 500. Siitä huolimatta esimerkiksi vuosien 2003 ja 2008 välillä nähty nousukausi vaikuttaisi kuvan 10 perusteella olleen jokaisen markkinan osalta vahvaa nousua. Tästä seuraa se, että tarkasteluajanjaksolla on huomattavia vaikutuksia johdettuun tehokkaaseen rintamaan.

Kuva 10. Indeksituotot logaritmisella asteikolla

Kuvassa 11 on havainnollistettu käytettyä dataa. Kuvaajan pohjana on absoluuttiset kuukausittaiset tuotot. Diagonaalipaneelissa näkyy kunkin osakeindeksin tuottojen jakauma. Vastaavasti pistekuvio osoittaa osakeindeksiparien välisen korrelaation.

Kuvaajasta on helposti havaittavissa osakeindeksien välinen positiivinen korrelaatio, jota pistekuvion punainen viiva pyrkii selventämään. Oikean yläreunan luvut antavat vielä kunkin osakeindeksiparin välisen korrelaation numerona.



Kuva 11. Tuottojakauma, sekä korrelaatio absoluuttisilla kuukausittaisilla tuotoilla.

Taulukoissa 1-4 on esitetty kaikkien tutkittavien tuottotyyppien yleiset tilastot.

4.3. Tuottojen tilastotaulukot

Tämän alaluvun alle on koottu kaikki yleiset tilastot, jotka liittyvät eri tuottoihin. Ensimmäisenä on taulukoitu kaikkien tuottojen yleiset tilastot. Jokainen laskettu tilasto osoitetaan ensimmäisellä sarakkeella vasemmalta. Ensimmäisellä rivi puolestaan kertoo osakeindeksin, jonka tilasto on laskettu. Toisena on taulukoitu kaikkien tuottojen kovarianssitaulukot. Keskiarvot, joita tarvitaan tehokkaiden rintamien laskemisessa löytyvät yleisistä tilastoista. Erityisesti kovarianssitaulukot ja keskiarvot ovat huomattavan tärkeitä ajatellen tehokkaita rintamia, jotka esitellään kappaleessa 3.4. Kovarianssitaulukoista johdetaan tehokkaiden rintamien riski, ja keskiarvoista puolestaan tehokkaiden rintamien tuotto.

4.3.1. Yleiset tilastot

Taulukko 2. Logaritmisten vuosituottojen yleiset tilastot

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
Minimi	-0.375802	-0.578790	-0.485902	-0.546864
Maksimi	0.220688	0.383039	0.293495	0.449290
1. Kvintiili	-0.050571	-0.024927	-0.000032	-0.118049
3. Kvintiili	0.134830	0.226948	0.210700	0.148511
Keskiarvo	0.039415	0.073906	0.076842	0.005776
Mediaani	0.086150	0.126853	0.107873	0.028672
Summa	1.300694	2.438890	2.535787	0.190603
Keskivirhe	0.025176	0.039199	0.030162	0.036657
Varianssi	0.020916	0.050705	0.030022	0.044344
Keskihajonta	0.144624	0.225179	0.173268	0.210579
Vinous	-1.083663	-1.165312	-1.243672	-0.325331
Huipukkuus	0.432741	1.163171	1.516697	-0.014846

Taulukko 3. Absoluuttisten vuosituottojen yleiset tilastot

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
Minimi	-0.313262	-0.439424	-0.384858	-0.421238
Maksimi	0.246935	0.466735	0.341107	0.567198
1. Kvintiili	-0.049314	-0.024619	-0.000032	-0.111347
3. Kvintiili	0.144342	0.254765	0.234542	0.160105
Keskiarvo	0.050244	0.101222	0.094593	0.027146
Mediaani	0.089970	0.135250	0.113906	0.029087
Summa	1.658041	3.340337	3.121579	0.895830
Keskivirhe	0.024450	0.038278	0.029841	0.036768
Varianssi	0.019727	0.048351	0.029385	0.044612
Keskihajonta	0.140454	0.219889	0.171422	0.211215
Vinous	-0.823907	-0.581824	-0.778202	0.271640
Huipukkuus	-0.253897	-0.068556	0.142199	-0.056107

Taulukko 4. Logaritmisten kuukausituottojen yleiset tilastot

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
Minimi	-0.148584	-0.293327	-0.185636	-0.272162
Maksimi	0.116465	0.193738	0.119421	0.182873
1. Kvintiili	-0.019202	-0.026139	-0.017919	-0.035958
3. Kvintiili	0.028509	0.043588	0.033902	0.039437
Keskiarvo	0.002934	0.005465	0.006126	-0.000735
Mediaani	0.007764	0.011079	0.011362	0.004129
Summa	1.173557	2.186130	2.450304	-0.293839
Keskivirhe	0.002015	0.003001	0.002171	0.003012
Varianssi	0.001625	0.003603	0.001886	0.003628
Keskihajonta	0.040308	0.060023	0.043429	0.060234
Vinous	-0.553727	-0.867122	-0.728455	-0.509666
Huipukkuus	0.910668	2.579441	1.344794	1.068079

Taulukko 5. Absoluuttisten kuukausituottojen yleiset tilastot

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
Minimi	-0.138073	-0.254222	-0.169425	-0.238269
Maksimi	0.123519	0.213778	0.126844	0.200662
1. Kvintiili	-0.019019	-0.025800	-0.017760	-0.035319
3. Kvintiili	0.028920	0.044552	0.034483	0.040225
Keskiarvo	0.003745	0.007259	0.007082	0.001058
Mediaani	0.007795	0.011140	0.011426	0.004138
Summa	1.498106	2.903416	2.832666	0.423009
Keskivirhe	0.002002	0.002954	0.002154	0.002974
Varianssi	0.001603	0.003490	0.001857	0.003538
Keskihajonta	0.040037	0.059072	0.043090	0.059482
Vinous	-0.397443	-0.534263	-0.549374	-0.264444
Huipukkuus	0.714952	1.847141	0.966239	0.682706

4.3.2. Kovarianssitaulukot

Kovarianssitaulukot **x-y** osoittavat kunkin osakeindeksiparin välisen kovarianssin. Tutkimuksen kannalta erityistä huomiota ansaitsevat **taulukot x ja y**. **Taulukko x** osoittaa, kuinka paljon suurempi logaritminen vuosituotto on verrattuna absoluuttiseen vuosituottoon jokaisen osakeindeksiparin välillä. **Taulukko y** on edellistä vastaava kuukausituottojen osalta.

Vuosituottojen osalta kovarianssitaulukoiden prosentuaalinen ero on keskimäärin 10,69 %, kun osakeindeksien omia vastinpareja (esimerkiksi FTSE 100-FTSE 100 – kovarianssi) ei oteta huomioon. Kuukausituotoissa ero on 3,57 %. Ero vuosittaisten ja kuukausittaisten tuottojen välillä on huomattava.

Kovarianssien välinen ero on keskeinen syy sille, että tehokkaat rintamat ovat enemmän toistensa kaltaisia käytettäessä kuukausittaisia tuottoja, riippumatta laskentatavasta. Kuten aiemmin kuvan 2 yhteydessä todettiin, tuottojen kasvaessa kasvaa myös logaritmisten ja absoluuttisten tuottojen ero. Tästä seuraa myös erot kovariansseissa, sekä erot tehokkaissa rintamissa.

Taulukko 6. Kovarianssitaulukko: logaritmiset kuukausituotot

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
FTSE 100	0,001602969	0,00176329	0,0013115	0,001163
DAX 30	0,001763289	0,00348951	0,00187705	0,001819
S&P 500	0,001311502	0,00187705	0,00185674	0,001391
Nikkei 225	0,00116334	0,001819	0,00139076	0,003538

Taulukko 7. Kovarianssitaulukko: absoluuttiset vuosituotot

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
FTSE 100	0,01972733	0,02621727	0,01952213	0,01356594
DAX 30	0,02621727	0,04835134	0,02937998	0,02722591
S&P 500	0,01952213	0,02937998	0,0293854	0,019891
Nikkei 225	0,01356594	0,02722591	0,019891	0,0446116

Taulukko 8. Kovarianssitaulukko: logaritmiset kuukausituotot

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
FTSE 100	0.001624697	0.001818861	0.001338207	0.001207673
DAX 30	0.001818861	0.003602764	0.001936430	0.001909928
S&P 500	0.001338207	0.001936430	0.001886103	0.001450135
Nikkei 225	0.001207673	0.001909928	0.001450135	0.003628157

Taulukko 9. Kovarianssitaulukko: absoluuttiset kuukausituotot

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
FTSE 100	0,02091609	0,02840894	0,02078784	0,01567417
DAX 30	0,02840894	0,05070548	0,03232924	0,03006596
S&P 500	0,02078784	0,03232924	0,03002166	0,02253209
Nikkei 225	0,01567417	0,03006596	0,02253209	0,04434369

Taulukko 10. Kovarianssien prosentuaalinen ero vuosituottoja vertailtaessa

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
FTSE 100	6,03 %	8,36 %	6,48 %	15,54 %
DAX 30	8,36 %	4,87 %	10,04 %	10,43 %
S&P 500	6,48 %	10,04 %	2,17 %	13,28 %
Nikkei 225	15,54 %	10,43 %	13,28 %	-0,60 %

Taulukko 11. Kovarianssien prosentuaalinen ero kuukausituottoja vertailtaessa

	FTSE 100	DAX 30	S&P 500	Nikkei 225
FTSE 100	1,36 %	3,15 %	2,04 %	3,81 %
DAX 30	3,15 %	3,25 %	3,16 %	5,00 %
S&P 500	2,04 %	3,16 %	1,58 %	4,27 %
Nikkei 225	3,81 %	5,00 %	4,27 %	2,54 %

4.4. Portfolioanalyysi

Tässä osiossa on graafinen esitys portfolioista, jotka on kutakin tuottoa kohden laskettu. Ensimmäisenä esitellään tehokkaat rintamat. Toisena tehokkaiden rintamien antamat portfolioiden painotukset riskin ja tuoton suhteen. Viimeisenä näytetään, kuinka tehokkaiden rintamien painotetut tuotot jakautuvat.

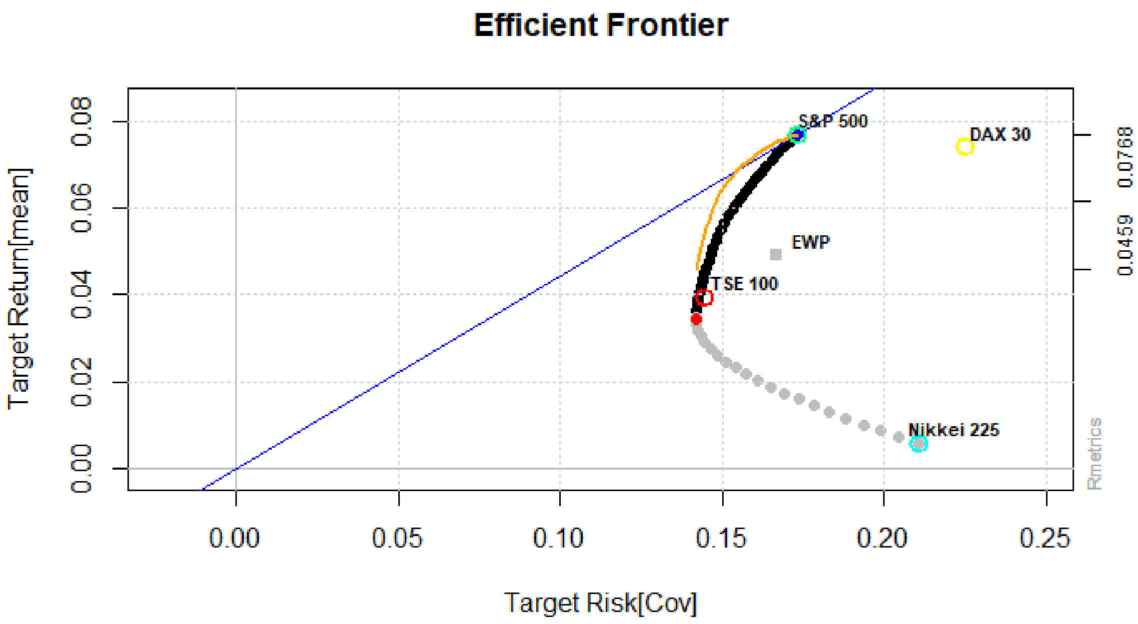
Tutkimusta tehdessä portfolioille on asetettu rajoitteita, jotka koskevat kaikkia tehokkaita rintamia. Portfolion rajoitteet ovat niin sanotut ”long-only”-rajoitteet. Tämä tarkoittaa, että lyhyeksi myynti on kielletty. Tästä seuraa, että jokaisen yksittäiseen portfolion paino voi olla nollan ja yhden välissä. Lisäksi portfolioiden painojen summa tulee olla tasan 1.

4.4.1. Tehokkaat rintamat

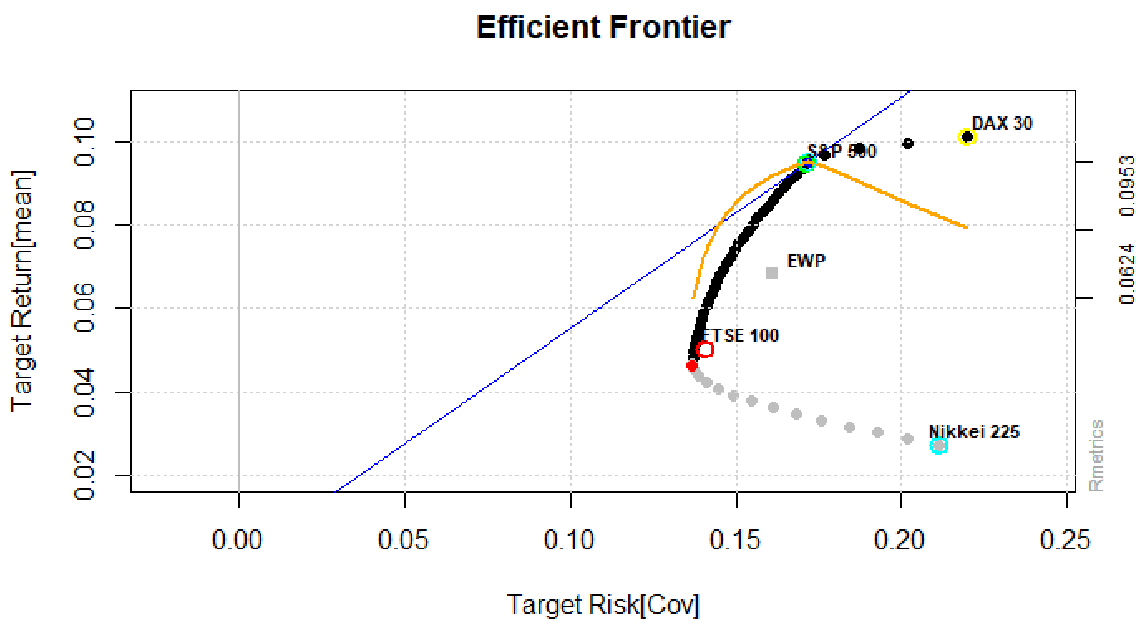
Tehokkaat rintamat on esitetty kuvissa 12–15. Kuvat koostuvat useasta elementistä: Kaikki yksittäiset osakeindeksit on merkitty eri värisillä ympyröillä. ”EWP” kuvaa portfoliota, jossa kaikkia osakeindeksit ovat saaneet portfoliossa yhtäläisen painon, tarkoittaen 25 prosentin painotusta. Tehokasta rintamaa kuvaa mustat pisteet, ja sillä sijaitsevat kaikki tehokkaat portfoliot. Sininen suora viiva, joka sivuaa tehokasta rintamaa, on niin sanottu tangenttisuora. Kohta, jossa tangenttisuora sivuaa tehokasta rintamaa, on merkitty turkoosilla ympyrällä. Kyseisessä kohdassa on Sharpe-luvulta tehokkain mahdollinen portfolio. Oranssi viiva, joka kulkee tehokkaan rintaman vierellä kuvaa tehokkaan rintaman portfolioiden eri Sharpe-lukuja, pienin ja suurin Sharpe-luku on merkitty kuvan oikeaan yläreunaan. Punainen piste tehokkaan rintaman keskivaiheilla kuvaa minimivarianssiportfoliota.

Vuosituottojen tehokkaissa rintamissa on kaksi selkeää eroa. Logaritmisten vuosituottojen kohdalla Sharpen-lukua kuvaava oranssi käyrä loppuu tangenttiportfolioon ja samaan paikkaan, jossa on tehokkaan rintaman viimeinen laskettu portfolio. Absoluuttisten tuottojen kohdalla nähdään Sharpen-luvun kääntyminen oikealle alaviistoon, sillä tehokas rintama jatkuu vielä kohti DAX 30-osakeindeksiä, joka sijaitsee vuosittaisten absoluuttisten tuottojen tehokkaalla rintamalla. Tehokkainta portfoliota kuvaava Sharpe-luku on logaritmisten vuosituottojen kohdalla 0,0768 ja absoluuttisten tuottojen kohdalla 0,0953. Absoluuttisten vuosituottojen Sharpe-luku on noin 24,1 % korkeampi, kuin logaritmisten vuosituottojen Sharpe-luku.

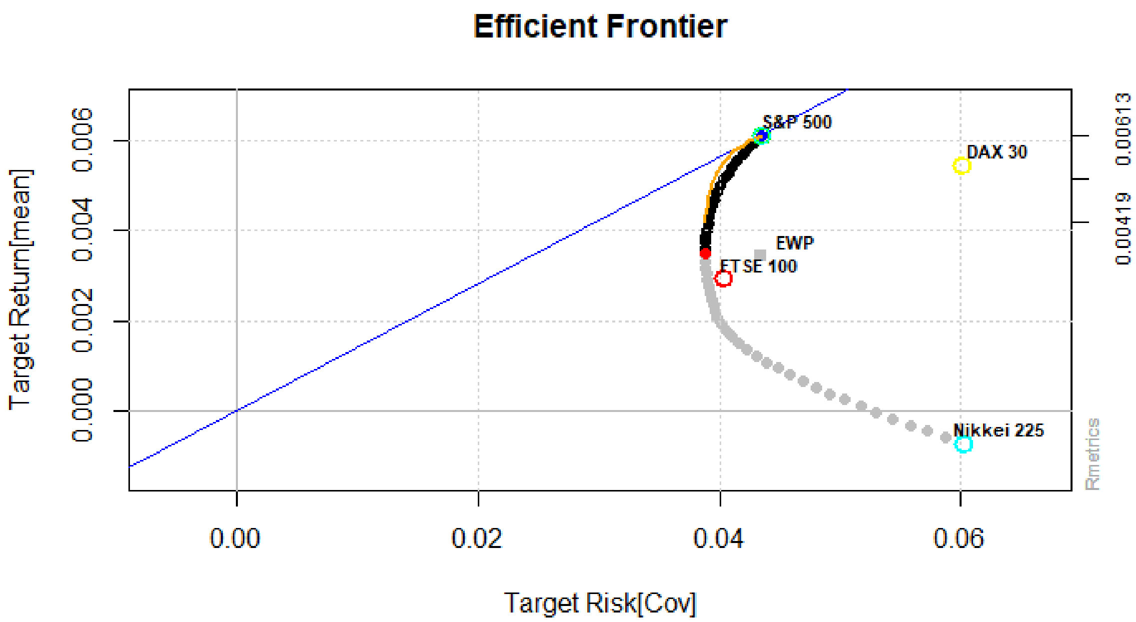
Kuukausituottojen välinen tarkastelu on haastavampaa kuin vuosituottojen, sillä erot ovat vielä pienemmät kuin vuosituottojen välillä. Käytännössä kuvista on havaittavissa samanlainen ero absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen välillä, kuin vuosituotoissakin. Sharpen luku kääntyy laskuun tangenttiportfolion kohdalta absoluuttisten kuukausituottojen kohdalla, sillä tehokas rintama jatkuu DAX 30-osakeindeksiin saakka. Logaritmisten kuukausituottojen kohdalla tehokas rintama loppuu jälleen S&P 500-osakeindeksiin. Absoluuttisten kuukausituottojen Sharpe-luku on noin 15,5 % korkeampi, kuin logaritmisten kuukausituottojen Sharpe-luku.



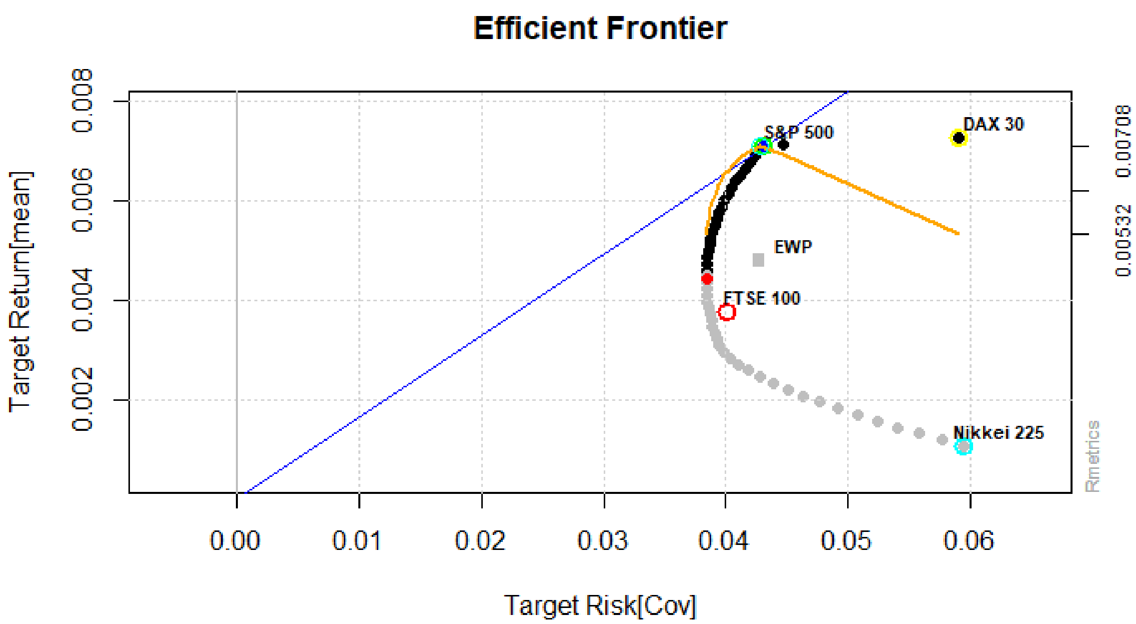
Kuva 12. Logaritmisten vuosituottojen tehokas rintama



Kuva 13. Absoluuttisten vuosituottojen tehokas rintama



Kuva 14. Logaritmisten kuukausituottojen tehokas rintama



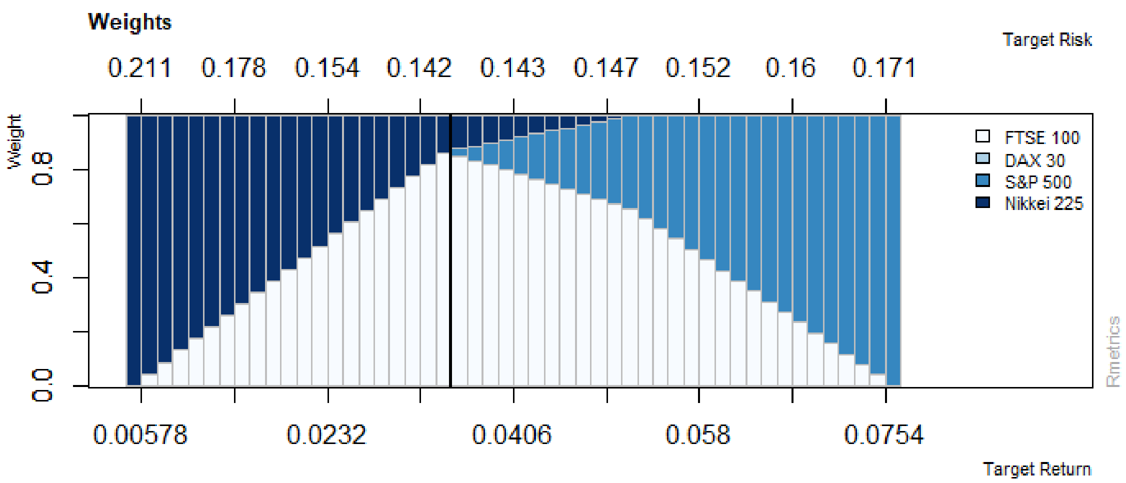
Kuva 15. Absoluuttisten kuukausituottojen tehokas rintama

4.4.2. Portfolioiden painotukset

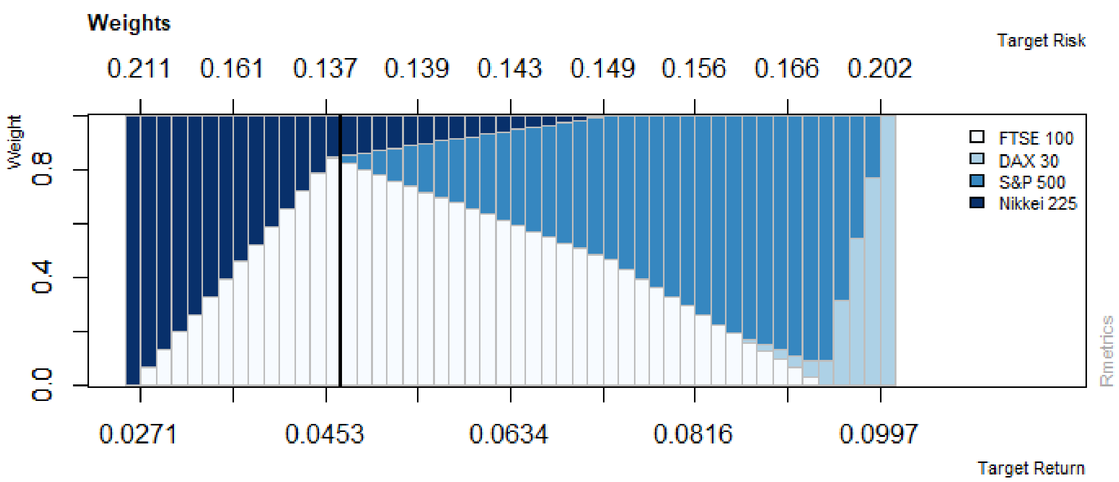
Kuvissa 16–19 on esitetty kaikkien neljän tuottotyypin optimoidut portfolioiden painot. Kuvien vasemmassa reunassa nähdään osakeindeksin paino, jonka tulee olla tasan yksi. Kuvan yläreunasta voidaan valita haluttu riskin määrä, ja alareunasta puolestaan riskiä vastaava tuotto. Kuvan läpi kulkeva musta viiva osoittaa minimivarianssiportfolion.

Minimivarianssiportfolion oikealla puolella olevat esitetyt portfoliot ovat niin kutsuttuja tehokkaita portfolioita.

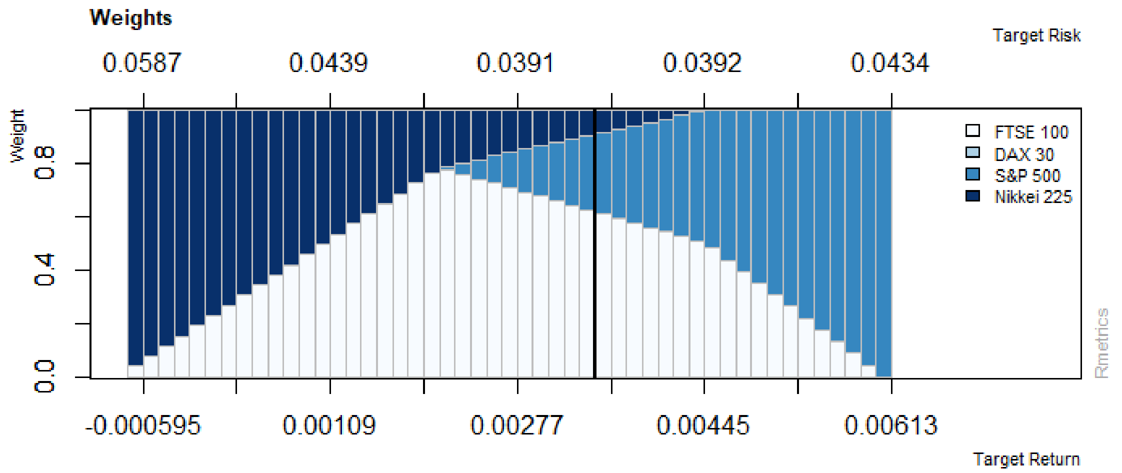
Kaikkiin kuviin 16–19 pätee, että pienimmän riskin osakeindeksi on ollut Nikkei 225. Vastaavasti korkeimman tuoton osakeindeksi on ollut DAX 30. Nämä edustavat ääripäitä portfolion painotuksia vertailtaessa. Esimerkiksi DAX 30-osakeindeksi on mukana ainoastaan portfolioissa, joiden riski ja tuotto ovat molemmat hyvin korkeita. Toisaalta logaritmisia tuottoja käytettäessä DAX 30-osakeindeksi ei ole osana yhtäkään tehokasta portfoliota riippumatta siitä, onko tuotot laskettu kuukausittain vai vuosittain.



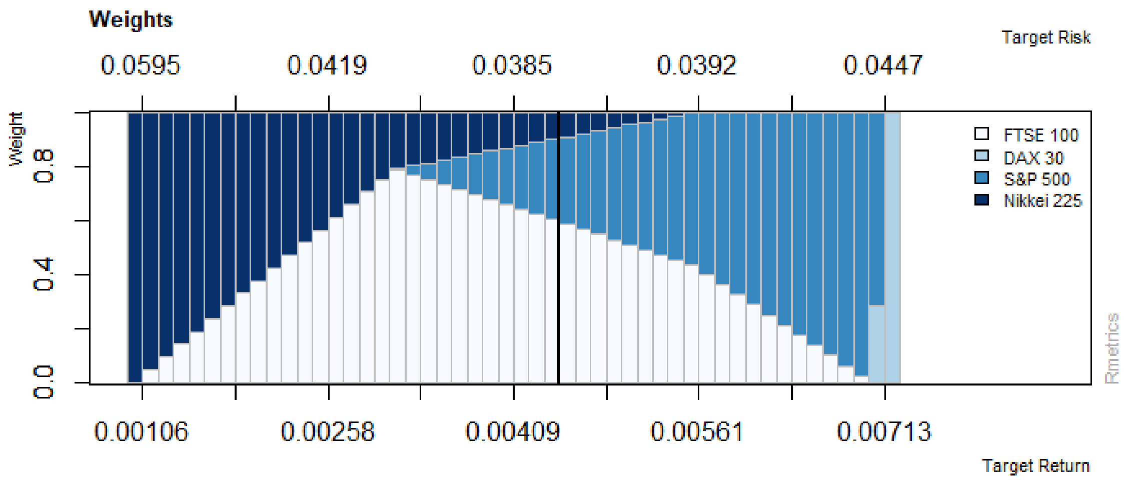
Kuva 16. Portfolion painotukset: logaritmiset vuosituotot



Kuva 17. Portfolion painotukset: absoluuttiset vuosituotot



Kuva 18. Portfolion painotukset: logaritmiset kuukausituotot



Kuva 19. Portfolion painotukset: absoluuttiset kuukausituotot

Portfolioiden painotuksia tarkastelemalla voidaan yleisesti todeta, että absoluuttisia tuottoja käyttämällä on mahdollista saavuttaa tehokkaita portfolioita, joissa on sekä korkeampi tuotto, että korkeampi riski. Tämä on myös loogista, ajatellen kappaleen 3.3.2. kovarianssitaulukoita, joissa todettiin, että absoluuttisina tuottoina lasketut osakeindeksien väliset kovarianssit ovat selkeästi suurempia, kuin logaritmisten tuottojen kovarianssit.

Mikäli sijoittaja valitsee tehokkaalta rintamalta portfolion, joka on lähellä minimivarianssiportfoliota, ei absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen välillä ole juurikaan eroa, kun verrataan vuosituottoja vuosituottoihin tai kuukausituottoja kuukausituottoihin. Molempia tuoton laskentatapoja käyttäen päädytään hyvin samankaltaisiin portfolioihin.

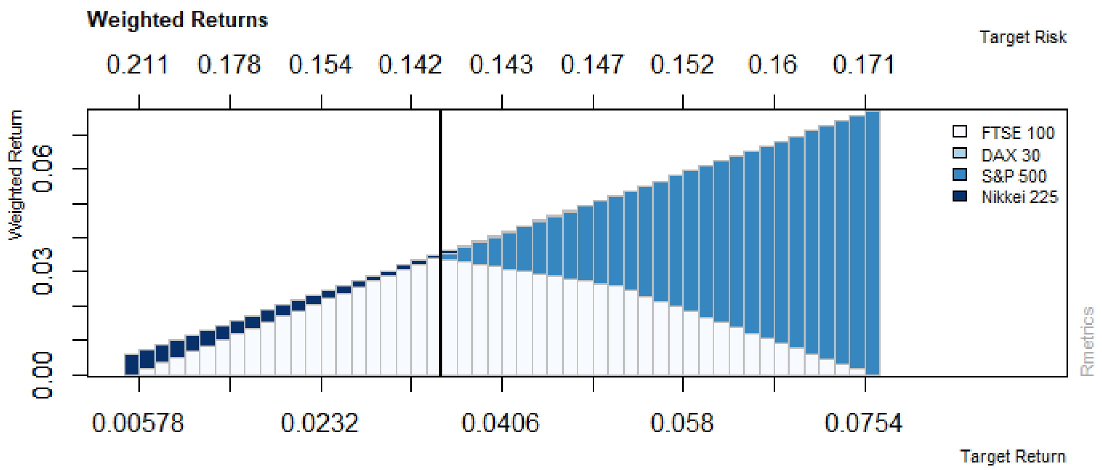
Huomionarvoisena seikkana on pidettävä sitä, että minimivarianssiportfoliot ovat hyvin erilaiset, kun vertaillaan ajallista eroa tuottojen välillä. Esimerkiksi logaritmisten vuosituottojen minimivarianssiportfolio eroaa koostumukseltaan selvästi logaritmisten kuukausituottojen minimivarianssiportfoliosta. On myös huomioitava, että hyvin pienet riskin muutokset minimiportfoliosta katsottuna saattavat tarjota mahdollisuuden huomattavalle tuoton kasvulle, kuten huomataan esimerkiksi logaritmisten kuukausituottojen kohdalla kuvassa 18.

Mikäli sijoittaja haluaisi valita esimerkiksi vuosittaisista tuotoista johdetun portfolion, jonka odotettu tuotto on 6 %, hänellä olisi kaksi hyvin eri painotuksilla olevaa salkkua riippuen siitä onko käytetty absoluuttisia vai logaritmisia tuottoja. Logaritmisia tuottoja käytettäessä portfolio koostuisi noin 40-prosenttisesti FTSE 100-indeksistä, ja 60-prosenttisesti S&P 500-indeksistä. Absoluuttisia tuottoja käytettäessä portfolio koostuisi vastaavasti 6 % odotetulla tuotolla noin 60-prosenttisesti FTSE 100-indeksistä, noin 30-prosenttisesti S&P 500-indeksistä, ja noin 10-prosenttisesti Nikkei 225-indeksistä.

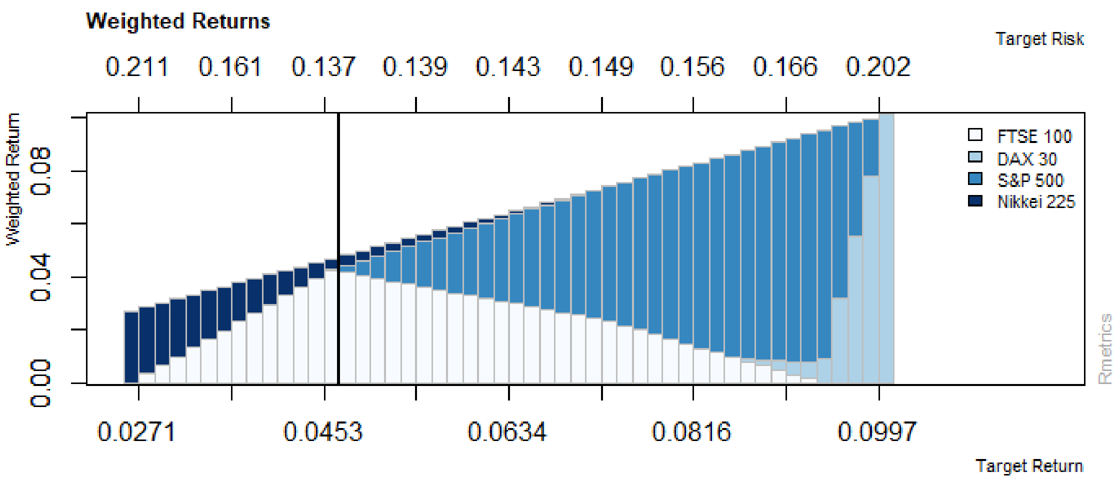
4.4.3. Portfolioiden painotetut tuotot

Portfolioiden painotetut tuotot kuvissa 20-23 kertovat, kuinka paljon yksittäinen portfolioon kuuluva osakeindeksi vastaa kyseisen tehokkaan portfolion tuotoista. Esimerkiksi logaritmisten vuosituottojen minimivarianssiportfolion painotettu tuotto on noin 0,035 eli noin 3,5 %. Tämä 3,5 % jakaantuu eri osakeindekseille siten, että käytännössä kaikesta tuotosta vastaa FTSE 100-indeksi, ja erittäin pienestä osuudesta vastaa Nikkei 225-indeksi.

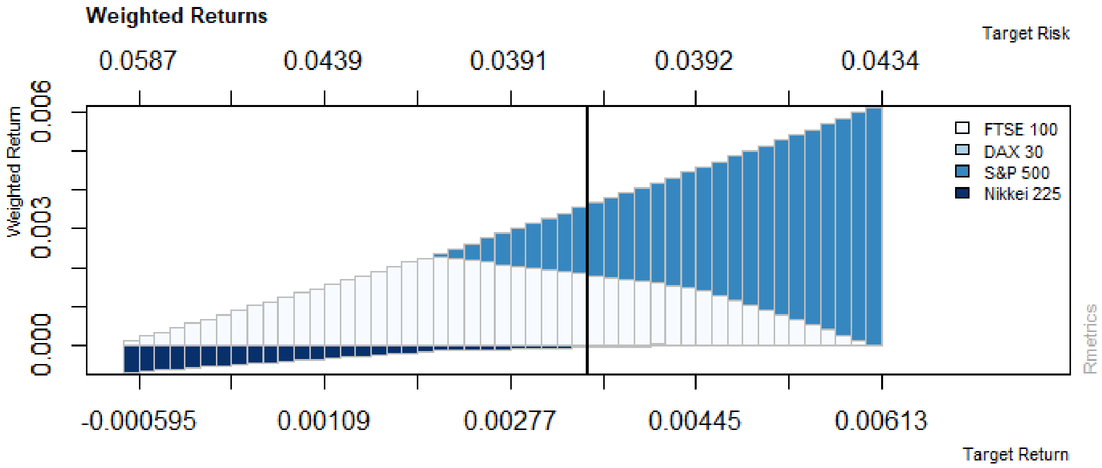
Aiemmin tehokkaiden rintamien yhteydessä nähtiin ero absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen välillä. Absoluuttisten tuottojen tehokas rintama jatkui DAX 30-indeksiin saakka. Kun verrataan logaritmisia vuosituottoja absoluuttisiin vuosituottoihin, huomataan ero korkeimpien riski-tuotto-yhdistelmän portfolioissa. Kaikkein tehokkaimpien portfolioiden välinen ero on 2,43 %. Kuten aiemmin Sharpe-lukujen osalta huomattiin, myös tämä ero on huomattavan suuri. Sama tapahtuu pienemmässä mittakaavassa kuukausituottojen kanssa, mutta ero on noin 0,1 %.



Kuva 20. Painotetut tuotot: logaritmiset vuosituotot

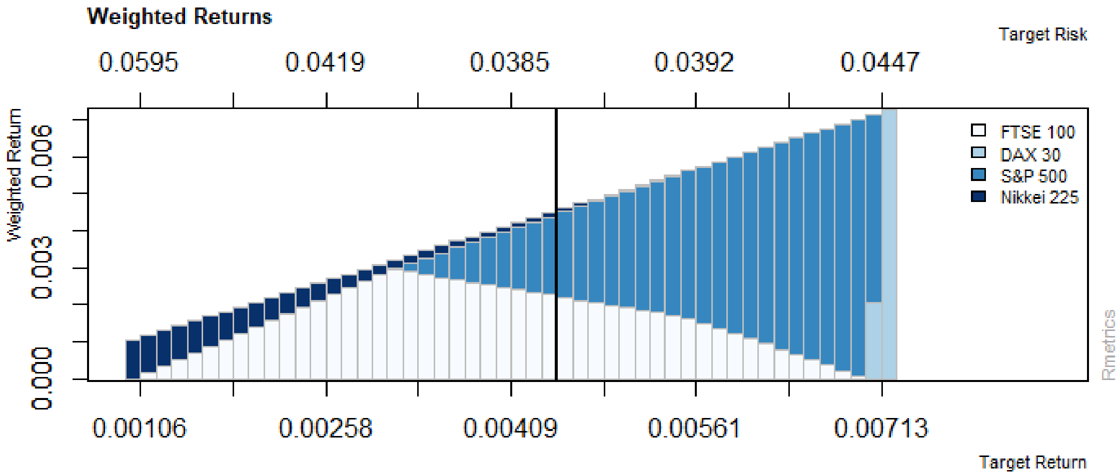


Kuva 21. Painotetut tuotot: absoluuttiset vuosituotot



Kuva 22. Painotetut tuotot: logaritmiset kuukausituotot

Absoluuttiset kuukausituotot



Kuva 23. Painotetut tuotot: absoluuttiset kuukausituotot

5. Johtopäätökset

Tämän tutkielman tarkoituksena on ollut selvittää absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen vaikutusta johdettaessa tehokasta rintamaa, jonka Markowitz (1952) on esitellyt osana modernia portfolioteoriaa. Tarkastelun kohteena on ollut kuukausi- ja vuosituotot.

Tutkielma perustuu seuraavaan hypoteesiin: tuottojen laskentatavalla on vaikutusta tehokkaaseen rintamaan, ja siinä oleviin tehokkaisiin portfolioihin. Hypoteesia tarkasteltiin vertailemalla tehokkaita rintamia, jotka johdettiin sekä kuukausittaisia että vuosittaisia absoluuttisia ja logaritmisia tuottoja käyttämällä. Molempia tarkastelemalla havaittiin, että tehokkaat rintamat, ja sillä sijaitsevat tehokkaat portfoliot ovat erilaiset, riippuen kumpaa tuottojen laskentatapaa käytetään.

Mitä pidemmäksi tuottojen laskentaperiodi kasvaa, sitä suuremmaksi riskin ja tuottojen ero muodostuu tehokkaalla rintamalla. Aiemmassa Hampisen (2021) tutkimuksessa havaittiin, että päivätuottojen välillä selvää eroa ei ollut. Kuukausittaisten tuottojen kohdalla ero voidaan havaita, mutta sen vaikutus on suhteellisen pieni. Vuosittaisten tuottojen kohdalla ero esimerkiksi minimivarianssiportfolion kohdalla on jo huomattava. Erot korostuvat kaikkein riskisimmissä/tuottoisimmissa portfolioissa. Tässä tutkielmassa havaittiin, että riippuen käytetystä laskentatavasta, portfolion odotettujen tuottojen ero voi tehokkaalla rintamalla kaikkein äärimmäisissä portfolioissa olla jopa yli 2 prosenttiyksikköä.

Tutkielmassa havaittiin myös, että vertailtaessa samoja tuottoja toisiinsa eri laskentaperiodeilla, tehokkaiden rintamien portfoliot saattavat poiketa esimerkiksi minimivarianssiportfolion kohdalla toisistaan melko paljon. Esimerkiksi absoluuttisten kuukausituottojen minimivarianssiportfolioon kuuluu käytännössä ainoastaan FTSE 100 ja Nikkei 225 osakeindeksejä, kun taas vuosituottojen kohdalla minimivarianssiportfolio koostuu FTSE 100-, S&P 500-, sekä Nikkei 225-osakeindekseistä.

Kokonaisuutena voidaan todeta, että tuottojen laskentatavoilla on hyvin vähän merkitystä tehokkaan rintaman johtamisessa, kun periodin pituus on kuukausi tai sitä lyhyempi. Mitä pidemmäksi periodi kasvaa, sitä suurempia ovat tuottojen vaihtelut ja sitä suurempi on vaikutus myös tehokkaaseen rintamaan. Vuosituottoja käytettäessä ero on jo merkittävä lyhyempiin periodeihin nähden, erityisesti ajatellen korkoa korolle-efektiä.

Tutkimushavaintojen lopputulemana voidaan pitää seuraavaa: kun sijoittaja haluaa hyödyntää tehokasta rintamaa, hänen kannattaa hyödyntää tuottoja, jotka on laskettu lyhyeltä aikaperiodilta. Tällöin tehokkaan rintaman portfolioiden painotukset ovat hyvin samanlaiset riippumatta käytetystä tuottojen laskentatavasta. Mikäli sijoittaja haluaa käyttää esimerkiksi vuosituottoja johtaessaan tehokasta rintamaa, hänen tulisi huomioida ero, joka laskentatavoista johtuen syntyy. Mitä pidempi periodi, sen suuremmaksi erot keskimäärin muodostuvat. Logaritmisilla tuotoilla laskettuna portfolioiden riski-tuotto-suhde on aina pienempi, kuin absoluuttisilla tuotoilla laskettuna.

Näistä syistä johtuen tehokkaiden rintamien johtamisessa voisi yleisesti ottaen olla järkevää käyttää korkeintaan kuukauden mittaisia periodeja tuotoille. Tällöin vältytään suurimmilta laskentatavoista johtuvista eroavaisuuksista johdetuissa tehokkaissa rintamissa. Ongelmana tässä on se, että erityisesti pitkällä aikavälillä dataa voi olla hankala saada jopa kuukauden mittaisilta periodeilta. Päiväkohtaiseen datan löytäminen esimerkiksi 40 vuoden takaa on jo erittäin hankalaa.

Toisena haasteena on tulosten tulkittavuus; vuosituottojen tulkinta on hyvin yksinkertaista, sillä niihin on totuttu. Päivätuotot tulee kertoa joko 365:llä, 360:llä tai 252:lla riippuen lähteestä ja halutusta lopputuloksesta, jotta saadaan sitä vastaava vuosituotto. Kuukausituotto puolestaan kerrotaan kahdellatoista sitä vastaavan vuosituoton saamiseksi. Vuosituottojen käyttäminen on tässä tapauksessa yksinkertaisinta, mutta jos ero laskentatavoissa aiheuttaa usean prosentin heiton eri laskentatapojen tehokkaissa rintamissa, niin todennäköisesti helpoimmin tulkittavia tuloksia saisi käyttämällä kuukausituottoja ja kertomalla ko. tuotot kahdellatoista tulosten tulkittavuuden parantamiseksi.

Vastaavia tutkimuksia, joissa keskitytään tutkimaan nimenomaisesti laskentatapojen erojen vaikutusta tehokkaaseen rintamaan ja siihen johdettuihin portfolioihin hyvin vähän. Kuitenkin absoluuttisia ja logaritmisia tuottoja on tutkittu, ja kyseiset tutkimukset on käyty melko kattavasti myös tämän tutkimuksen osalta läpi. Tämän tutkimuksen tulokset seuraavat näiden tutkimusten löydöksiä melko suoraviivaisesti. Esimerkiksi Hudsonin & Gregorioun (2014) löydökset, joiden mukaan laskentatavat aiheuttavat huomattavan eron lopputuloksissa ovat linjassa tämän tutkimuksen tulosten kanssa.

Tämän tutkimuksen tulokset voisivat parhaassa tapauksessa tuoda laajemmin esille sen, kuinka paljon tehokas rintama muuttuu riippuen täysin siitä mitä laskentatapaa sen laskemiseksi käytetään. Siitä voisi seurata esimerkiksi kansainvälisten tutkimusten yhtenäistäminen esimerkiksi siten, että jatkossa tutkijat käyttäisivät ainoastaan logaritmisia tuottoja tehokkaiden rintamien johtamiseksi. Tämä parantaisi tulosten vertailtavuutta erittäin laajasti. Sanottakoon kuitenkin, että etenkin 2000-luvun data osakkeiden osalta on varsin hyvin saatavilla. Tästä johtuen esimerkiksi yksittäisten aiempien tehokasta rintamaa tutkivien tutkimusten toistaminen vaihtamalla tuottojen laskentatapaa ei pitäisi olla valtavan työläs prosessi.

Tutkimuksen suurin anti löytyneekin siitä, että eri tuottojen käyttäminen eri periodeilla antaa erilaisia tuloksia. Koska näin on, niin tehokasta rintamaa tutkivien tai käyttävien tulisi ottaa tuotoista johtuvat erot huomioon riippumatta siitä mihin käyttötarkoitukseen ko. tehokas rintama on johdettu.

Tämän tutkimuksen jatkamiselle on olemassa edellytykset esimerkiksi laajentamalla dataa, tai kohdentamalla tutkimus esimerkiksi puhtaasti osakkeisiin. Lisäksi vanhempien tutkimusten tutkiminen molemmilla laskentatavoilla voi johtaa muuttuneisiin tutkimustuloksiin.

Lähteet

Alexeev, V. & Tapon, F. (2013). Equity Portfolio Diversification: How Many Stocks are Enough? Evidence from Five Developed Markets. *FIRN Research Paper*, n.d., n.d. https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2182295

Chalabi, Y., Chen, W., Ellis, A., Setz, T. & Würtz, D. (2015). Portfolio Optimization with R/Rmetrics. Rmetrics. Noudettu 3.5.2023 osoitteesta https://www.rmetrics.org/downloads/9783906041018-fPortfolio.pdf

Elton, E. & Gruber, J. (1977). Risk Reduction and Portfolio Size: An Analytical Solution. *Journal of Business, 50(4), 415-437*

Eun, C., Huang, W. & Lai, S. (2008). International Diversification with Large- and Small-Cap Stocks. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 43(2), 489-523. Noudettu 08.04.2023 osoitteesta http://www.jstor.org/stable/27647358

Evans, J. & Archer, S. (1968). Diversification and the Reduction of Dispersion: An Empirical Analysis. *The Journal of Finance*, 23(5), 761-767. https://doi.org/10.2307/2325905

Fabocci, F., Gupta, F., & Markowitz, H. (2002). The Legacy of Modern Portfolio Theory. *The Journal of Investing*, 11(3), 7-22. https://doi.org/10.3905/joi.2002.319510

Hampinen, J. (2021). *Absoluuttisten ja logaritmisten tuottojen erot tehokkaassa rintamassa.* [Kandidaatintutkielma, Vaasan yliopisto]. Julkaisematon tutkielma.

Hudson, R. & Gregoriou, A. (2014). Calculating and comparing security returns is harder than you think: A comparison between logarithmic and simple returns. *International Review of Financial Analysis*, 38, 151-162. https://doi.org/10.1016/j.irfa.2014.10.008

Mangram, M. (2013). A Simplified Perspective of the Markowitz Portfolio Theory. *Global Journal of Business Research*, 7(1), 59-70. Noudettu 8.4.2023 osoitteesta https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2147880

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91. https://doi.org/10.2307/2975974

Markowitz, H. (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. *Yale University Press*. http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bh4c8h

Meucci, A. (2010). Quant Nugget 2: Linear vs Compounded Returns – Common Pitfalls in Portfolio Management. *GARP Risk Professional*, n.d. 49-51. Noudettu 03.04.2023 osoitteesta https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1586656

Miskolzci, P. (2017). Note On Simple and Logarithmic Return. *APSTRACT*, 11, 127-136. https://doi.org/10.19041/APSTRACT/2017/1-2/16

Murphy, C. (29.7.2021). *Logarithmic Price Scale vs Linear Price Scale: What's the Difference?* Investopedia. https://www.investopedia.com/ask/answers/05/logvslinear.asp#:~:text=A%20logarithmic%20price%20scale%20uses,an%20equal%20distance%20between%20values.

Sharpe, W. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, 39(1), 119-138. http://dx.doi.org/10.1086/294846

Sharpe, W. (1994). The Sharpe Ratio. *The Journal of Portfolio Management*, 21, 49-58. https://doi.org/10.3905/jpm.1994.409501

Solnik, B., Boucrelle, C. & Le Fur, Y. (1996). International Market Correlation and Volatility. *Financial Analysts Journal*, 52(5), 17-34. Noudettu 8.4.2023 https://www.jstor.org/stable/4479942

Statman, M. (1987). How Many Stocks Make a Diversified Portfolio? *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(3), 353-363. https://doi.org/10.2307/2330969

Taylor, S. (2023, 26. huhtikuuta) *Covariance*. Corporate Finance Institute. Covariance - Definition, Formula, and Practical Example (corporatefinanceinstitute.com)

Taylor, S. (2023, 26. huhtikuuta) *Correlation*. Corporate Finance Institute. Correlation - Overview, Formula, and Practical Example (corporatefinanceinstitute.com)

Ultsch, A. (2009). Is Log Ratio a Good Value for Measuring Return in Stock Investments? Teoksessa Fink. A, Lausen. B, Seidel. W & Ultsch, A (toim.), *Advances in Data*

Analysis, Data Handling and Business Intelligence (s. 505-511). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-01044-6

Wagner, W. & Lau, S. (1971). The Effect of Diversification on Risk. *Financial Analysts Journal*, 27(6), 48-53. https://doi.org/10.2469/faj.v27.n6.48